Mecânica Clássica

Mecânica Analítica

Lucas Stori de Lara

Ponta Grossa, 03/2020

Dinâmica Lagrangiana

➢ Coordenadas Generalizadas

Considere uma partícula ou sistema de partículas em movimento, sujeita a possíveis restrições (vínculos). Haverá um número mínimo de coordenadas independentes necessárias para especificar o movimento.

Essas coordenadas representadas por

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

são *chamadas coordenadas* generalizadas e podem ser distâncias, ângulos ou valores relacionados a eles

Dinâmica Lagrangiana

- **Notação**:

O subscrito α variará de 1 a *n*, o número de graus de liberdade, enquanto o subscrito ν variará de 1 a N, o número de partículas do sistema.

- Considere o vetor posição da ν-partícula em relação ao sistema de coordenadas *xyz* como

$$\vec{r}_\nu = x_\nu \vec{\imath} + y_\nu \vec{\jmath} + z_\nu \vec{k}$$

A relação entre as coordenadas generalizadas e as coordenadas de posição são dadas pelas *equações de transformação*,

Dinâmica Lagrangiana

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$y_\nu = y_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$z_\nu = z_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Na forma vetorial, podemos escrever

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Essas funções são consideradas como sendo contínuas e tendo derivadas contínuas.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Princípio de D'Alembert

O princípio de D'Alembert, ou princípio do trabalho virtual, usa a noção de coordenadas generalizadas e o conceito dos deslocamentos virtuais para eliminar as forcas de vínculo da descrição do problema.

Deslocamentos Virtuais

- São deslocamentos infinitesimais de cada partícula que levam a uma configuração possível a outra configuração possível infinitesimalmente próxima no ***mesmo instante t***.

- Dado um sistema de N partículas os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i, i = 1, \ldots, N$, são deslocamentos infinitesimais das posições $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ realizados instantaneamente e com a propriedade de serem compatíveis com os vínculos

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

➢ Deslocamentos Virtuais

- Em suma, as características definidoras dos deslocamentos virtuais são:

i. eles são infinitesimais;

ii. ocorrem num instante *t* fixo;

iii. não violam os vínculos.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

- **Trabalho Virtual**

Nesse formalismo, a distinção entre forças de vínculo e outras forças, que chamaremos de forças aplicadas, é fundamental. Seja então

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

a força total atuando na i-ésima partícula do sistema, onde $\vec{f}_i$ são as forcas de vínculo e $\vec{F}_i^{(a)}$ são as forças aplicadas, que podem ser externas ou devido às outras partículas do sistema.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Veremos inicialmente como fazer isso no caso **estático**, isto é, um sistema de partículas em equilíbrio. Neste caso $\vec{F}_i = 0$ e, quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

como $$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

resulta $$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i} \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Levando em conta que o trabalho virtual das forças de vínculo é zero, somos conduzidos ao chamado ***princípio dos trabalhos virtuais***:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Este princípio permite exprimir a condição de equilíbrio para sistemas vinculados em termos somente das forças aplicadas.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Estamos interessados na dinâmica, que pode ser formalmente reduzida à estática escrevendo a segunda lei de Newton na forma $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$, com $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$. Segundo a interpretação de d'Alembert. Cada partícula do sistema encontra-se em "equilíbrio" sob uma força resultante que é a soma da força real com uma "força efetiva invertida" igual a $-\dot{\vec{p}}_i$. Esta força adicional fictícia é uma força de inércia existente no referencial que acompanha o movimento da partícula, isto é, no qual ela permanece em repouso. Podemos escrever:

$$\sum_i (\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

é verdadeira para qualquer deslocamento virtual $\delta\vec{r}_i$.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Usando a equação $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$ e admitindo a nulidade do trabalho virtual das forças de vínculo, resulta o chamado ***princípio de d'Alembert***:

$$\sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)}\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

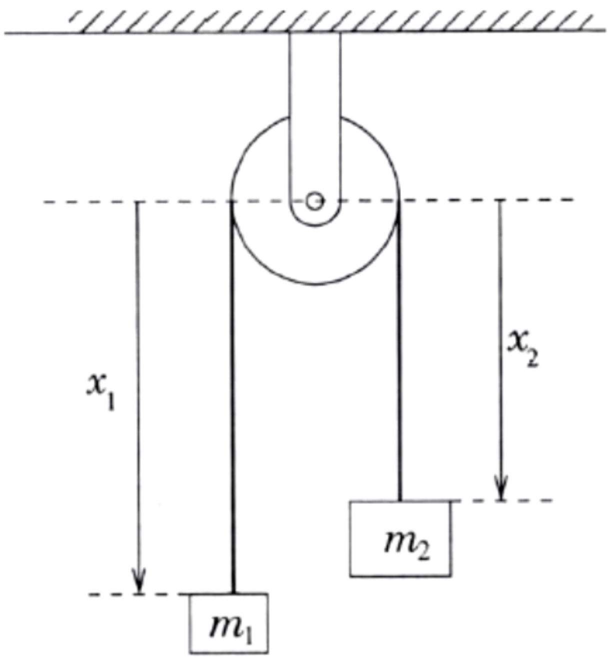
Este princípio representa uma extensão do princípio dos trabalhos virtuais a sistemas mecânicos em movimento.

Em suas aplicações concretas é preciso levar em conta que os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ não são independentes, pois têm que estar em harmonia com os vínculos.

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Máquina de Atwood

A roldana é suposta sem massa e sem atrito. Com o sistema cartesiano indicado na figura, temos: $\vec{r}_1 = x_1 \hat{\imath} \;\; e \;\; \vec{r}_2 = x_2 \hat{\imath}$



e o vínculo holônomo escreve-se:

$$x_1 + x_2 = l$$

onde a constante l é determinada pelo raio da roldana e o comprimento do fio, suposto inextensível e de massa desprezível. Claramente, os deslocamentos virtuais $\delta x_1 \;\; e \;\; \delta x_2$ são compatíveis com o vínculo $x_1 + x_2 = l$ e estão relacionados por

$$\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \delta x_2 = -\delta x_2$$

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

Em outras palavras, se uma das massas sobe a outra desce a mesma distância, e vice-versa.

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 = \vec{F}_1^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_2$$

$$= m_1 g\hat{\imath} \cdot \delta\vec{r}_1 + m_2 g\hat{\imath} \cdot \delta\vec{r}_2$$

$$m_1\ddot{x}_1 \cdot \delta x_1 + (-m_2\ddot{x}_1) \cdot (-\delta x_1) = m_1 g\delta x_1 + m_2 g(-\delta x_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x}_1\delta x_1 = (m_1 - m_2)g\delta x_1$$

Dinâmica Lagrangiana - Princípio de d'Alembert

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 \delta x_1 = (m_1 - m_2) g \delta x_1$$

Em vista da arbitrariedade de δx_1, resulta a equação do movimento da massa m_1:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2) g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

esse resultado coincide com o resultado obtido pelo tratamento newtoniano elementar. A aceleração de m_2é simplesmente $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$.

Dinâmica Lagrangiana

➢ Forças Generalizadas

Se W for o trabalho total realizado sobre um sistema de partículas pelas Forças $\vec{F}_i^{(a)} \equiv \vec{F}_i$ atuantes (aplicadas) sobre a *k*-ésima partícula, então

$$dW = \sum_{i=1}^{n} Q_k \delta q_k$$

onde

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Q_k é chamada de *força generalizada* associada à coordenada generalizada q_k .

Dinâmica Lagrangiana

➢ Equações de Lagrange

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças sejam deriváveis de um potencial ou energia potencial *V*, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças $\vec{F}_i$ sejam deriváveis de um potencial escalares $V(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N, t)$ (ou energia potencial *V)*, Neste caso,

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\hat{k}\right)$$

Dinâmica Lagrangiana

e as forças generalizadas escrevem-se

$$Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{q_k} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

onde usamos a regra da cadeia.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

Dinâmica Lagrangiana

Como $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k$$ e $$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0$$

Dado que ${}^{\partial V}/_{\partial \dot{q}_k}=0$, esta ultima equação equivale a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-V)\right]-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0$$

Definindo a *função de Lagrange* ou, simplesmente, *lagrangiano* L por

$$\boxed{L=T-V}$$

Dinâmica Lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-V)\right]-\frac{\partial}{\partial q_k}(T-V)=0 \qquad L=T-V$$

as equações de movimento do sistema podem ser escritas na forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{k}}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_\mathrm{k}}=0} \Rightarrow$$

Equações de Lagrange

onde $k=1,\ldots,n$.

Se o sistema não for conservativo
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{k}}\right)-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_\mathrm{k}}=Q_k$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo 10:

O objetivo deste primeiro exemplo é ilustrar certos cuidados que devemos ter em relação às várias derivadas parciais e totais que aparecem ao longo dos cálculos no formalismo de Lagrange. Considere um sistema fictício de dois graus de liberdade cuja Lagrangeana é dada por $L = {q_1}^2 \dot{q}_2 + {\dot{q}_1}^2$.

Equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Essa Lagrangeana tem as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1\dot{q}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Dinâmica Lagrangiana

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 2\dot{q}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1^2 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 2q_1\dot{q}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0.$$

Veja que q_2 não aparece em **L**. As derivadas totais em relação ao tempo ficam

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 2\ddot{q}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = 2q_1\dot{q}_1$$

Como as equações de Lagrange tem a forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\mathrm{q}}_\mathrm{k}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{q}_\mathrm{k}} = 0$$

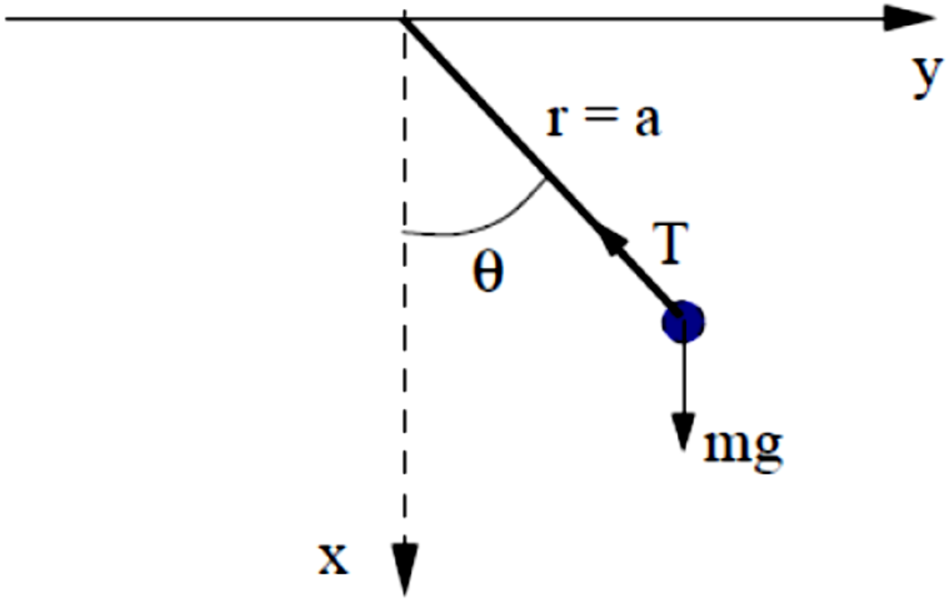
de forma que as duas equações de movimento ficam

$$\ddot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 = 0 \qquad\qquad 2q_1\dot{q}_1 - 0 = 0$$

Dinâmica Lagrangiana

Exemplo

Considere o pendulo simples da figura abaixo. Em coordenadas polares o raio é fixo r = a e θ é a única coordenada livre. A transformação de x, y para θ é ***x = a cos θ***, ***y = a sin θ***. A energia cinética é obtida calculando-se



$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta$$

Dinâmica Lagrangiana

A energia cinética é obtida calculando-se

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 = ma^2\dot{\theta}^2/2$$

$$V = -mgx = -mga\cos\theta$$

Como o lagrangiano é dado por $L = T - V$

Obtemos $$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

Dinâmica Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

Equações de Lagrange $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgasin\theta$$

e a equação de movimento fica

$$ma^2\ddot{\theta} - mgasin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad a\ddot{\theta} = -gsin\theta$$