

MECÂNICA

*Newtoniana & Lagrangiana
Hamiltoniana*

João Barcelos Neto

ISBN 85-88325-26-8



9 788588 325265

João Barcelos Neto

Mecânica Newtoniana,
Lagrangiana e Hamiltoniana

Editora Livraria da Física
São Paulo – 2004 – 1ª. edição

Copyright 2004 : Editora Livraria da Física

Editor: José Roberto Marinho
Capa: Arte Ativa
Impressão: Gráfica Paym

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Barcelos Neto, João.
Mecânicas Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana / João Barcelos Neto
-- 1. ed. -- São Paulo : Editora Livraria da Física, 2004.

1. Hamilton, William Rowan, 1805-1865
2. Lagrange, Joseph Louis de, 1736 - 1813
3. Mecânica - Estudo e ensino
4. Newton, Isaac, 1642 - 1727 I. Título

04-1175

CDD-531.07

Índices para catálogo sistemático:

1. Mecânica : Física clássica : Estudo e ensino 531.07

ISBN : 85-88325-26-8

Editora Livraria da Física

Telefone: 0xx11 - 3936 3413

Página na internet : www.livrariadafisica.com.br

PREFÁCIO

Este livro corresponde aos cursos de Mecânica Clássica I e II que ministrei nos primeiro e segundo semestres de 2002 no Instituto de Física da UFRJ. Ele representa, também, a experiência por mim acumulada em já ter ministrado este curso em outras oportunidades, tanto na UFRJ, como, inicialmente, no Instituto de Física da UERJ. Posso dizer ainda que ele traduz também o grande aprendizado que tive em participar das equipes de Física I e II, coordenadas pelos Professores Ennio Candotti e Samuel Santos e, depois, num trabalho desenvolvido juntamente com a Professora Maria Antonieta e os Professores Marcelo Alves e Marco Pedra num curso de Física I onde o começamos diretamente com as Leis de Newton. Isto significou o desenvolvimento, por nós mesmos, de fundamentos de Cálculo e Vetores no decorrer do próprio curso de Física I. Esta foi uma das experiências mais gratificantes que tive como professor.

Na elaboração do presente curso de Mecânica, tomei por base os seguintes parâmetros e pontos de vista:

(i) O estudante, em seqüência normal, começa a fazer Mecânica Clássica I quando ingressa no terceiro período. Nesta oportunidade, ele já deve ter cursado as disciplinas de Físicas I e II (que correspondem aos princípios de Mecânica Newtoniana, Termodinâmica, Fluidos e Movimento Oscilatório), bem como Cálculos I e II (onde aprendeu as noções fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral, Derivadas Parciais e algumas noções de Cálculo Vetorial). Embora possuidor de tais conhecimentos, tenho notado que, geralmente, ele ainda tem dificuldades de raciocinar na Mecânica Newtoniana através das leis de Newton, o que subentenderia uma familiaridade com o Cálculo e a sua utilização na Física, o que não chegou a ser adquirido no curso paralelo com a Física I. Uma outra deficiência, é que ele não tem confiança de usar a notação vetorial.

(ii) Com o intuito de contornar tais problemas, fiz uma rápida revisão de cálculo e vetores (não necessariamente tudo de uma vez), que corresponde ao conteúdo dos Apêndices A e B e incluí vários exercícios comuns aos cur-

dos de Física I e II. Minha intenção era de que eles fossem agora resolvidos de forma a pensar mais nos princípios físicos do que na utilização direta de algumas fórmulas (um vício do secundário que penetra significativamente no básico da universidade). Para ajudar neste objetivo, coloquei no Apêndice C a resolução de alguns dos exercícios propostos, que não são necessariamente os mais difíceis.

(iii) Para destacar o papel das leis de Newton e, conseqüentemente, dos referenciais inerciais, dediquei um Capítulo exclusivamente sobre o que seja movimento em referenciais não inerciais. A minha intenção é de ficar bem claro o papel das forças fictícias e o seu não aparecimento nos referenciais inerciais.

(iv) Geralmente, nos cursos de Mecânica Clássica, o estudo do pião é feito após a introdução do formalismo lagrangiano, o que pode levar a uma falsa impressão de que só este formalismo é capaz de tratar de tal assunto. Para evitar que isto pudesse acontecer, distribuí o assunto do corpo rígido por dois capítulos, um fica no formalismo newtoniano, onde o movimento do pião é considerado, e outro no lagrangiano. Mostrarmos aí como se chega às mesmas relações obtidas anteriormente no formalismo newtoniano e aproveitamos a oportunidade para ir mais além na parte formal da teoria, com a utilização da notação matricial (o que, acredito, poderá ser de grande utilidade em cursos subseqüentes, particularmente em Mecânica Quântica).

(v) Antes de iniciar os formalismos lagrangiano e hamiltoniano, dediquei um capítulo ao cálculo variacional, a fim de ficar bem claro o princípio de Hamilton, que passa a ser o fundamento teórico a partir desta parte do curso.

(vi) Há mais dois aspectos que gostaria de destacar. O primeiro é que nesta parte da formação do estudante, ele ainda vê a Física de forma estanque, em grupos de conhecimentos isolados, como se fosse possível desenvolver uma carreira científica onde parte do conhecimento básico pudesse não ser levada em consideração. Embora sendo a Mecânica Clássica um curso bem inicial, procurei mostrar exemplos onde outros ramos da Física aparecessem, principalmente no tocante à relatividade e ao eletromagnetismo. Procurei também mostrar as possíveis pontes para a Mecânica Quântica, através da idéia de Feynman das integrais de caminho e da quantização canônica de Dirac.

(vii) Por fim, não posso deixar de citar que uma significativa parte da minha motivação em escrever este curso se deveu ao convívio com um grupo de excelentes estudantes, os quais fizeram várias correções em minhas notas de aula preliminares.

Sumário

1	Conceitos de velocidade e aceleração	1
2	As leis de Newton	7
3	Movimento sob interação gravitacional	17
3.1	Movimento próximo à superfície da Terra	17
3.2	Movimento afastado da superfície da Terra	24
3.3	Movimento no interior da Terra	28
4	Movimento considerando forças de contato	39
4.1	Força de tensão e força normal	39
4.2	Forças de atrito estático e cinético	41
4.3	Atrito viscoso	44
5	Movimento de um corpo sob ação de uma mola	55
5.1	Só a mola atuando	55
5.1.1	Pêndulo simples	60
5.1.2	Pêndulo cujo período independe da amplitude	62
5.1.3	Circuito elétrico análogo	65
5.2	Quando também atua o atrito viscoso	66
5.2.1	Circuito elétrico análogo	69
5.3	Oscilações forçadas	70
5.3.1	Circuito elétrico análogo	77
6	Movimento de uma partícula num campo eletromagnético	83
7	Movimento em referências não-inerciais	39
7.1	Posição, velocidade e aceleração relativas	89
7.2	Observadores inerciais	92
7.3	Observador não-inercial	98

7.4	Observador não-inercial – referencial girante	101
8	Princípios de conservação	121
8.1	Trabalho e energia cinética	122
8.2	Conservação da energia	123
8.3	Pequenas oscilações	126
8.4	Conservação dos momentos linear e angular	132
8.5	Mais algumas aplicações	142
9	Sistema de partículas	159
9.1	Momento linear de um sistema de partículas	160
9.2	Momento angular de um sistema de partículas	164
9.3	Energia mecânica de um sistema de partículas	167
9.4	Mais alguns exemplos	173
9.4.1	A. As marés	173
9.4.2	Foguetes (sistemas de massa variável)	175
10	Corpo rígido - Parte I	185
10.1	Energia cinética e momento angular do corpo rígido	186
10.2	Introdução à dinâmica do corpo rígido	191
10.2.1	A. Máquina de Atwood	191
10.2.2	Mecânica da bola de bilhar	195
10.3	Equilíbrio do corpo rígido (estática)	197
10.4	Introdução ao movimento do giroscópio	200
10.5	Tensor de inércia	204
10.6	Matrizes de rotação e ângulos de Euler	208
10.7	Estudo mais aprofundado do movimento do giroscópio	213
11	Cálculo variacional	237
11.1	Equação de Euler-Lagrange	238
11.2	Os três problemas clássicos do cálculo variacional	242
11.2.1	Primeiro problema clássico	242
11.2.2	Problema da braquistócrona	243
11.2.3	Terceiro problema clássico	245
11.3	Problemas isoperimétricos (vínculos)	247
11.3.1	Primeiro problema	248
11.3.2	Segundo problema	251

12	Formulação lagrangiana da mecânica clássica	255
12.1	Princípio de Hamilton	256
12.2	Aplicações da equação de Euler-Lagrange	259
12.2.1	Máquina de Atwood	259
12.2.2	Pêndulo simples	263
12.3	A Lagrangiana	264
12.4	Leis de conservação	269
12.4.1	Um exemplo com duas partículas em interação	272
12.4.2	O problema de dois corpos	273
12.4.3	Partícula livre relativística	279
12.5	Poderíamos ir além, mas	281
13	Corpo rígido - Parte II	289
13.1	Graus de liberdade do corpo rígido	289
13.2	Vetores e tensores	296
13.3	Parâmetros de Cayley-Klein	303
13.4	Teorema de Euler	310
13.5	Momento angular e energia cinética do corpo rígido	316
13.6	Movimento do pião	319
14	Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica	331
14.1	Equações de Hamilton	331
14.2	Aplicações das equações de Hamilton	335
14.2.1	Máquina de Atwood	335
14.2.2	Partícula carregada movendo-se num campo eletromagnético	338
14.3	Mais uma ponte para a Mecânica Quântica	340
A	Derivação e integração	347
A.1	Derivação	347
A.2	Integração	348
B	Vetores e tensores	357
B.1	Preliminares	357
B.1.1	Adição de vetores	357
B.1.2	Multiplicação de um vetor por um escalar	357
B.1.3	Representação de um vetor através das componentes num sistema de eixos ortogonais	358
B.2	Produtos escalar e vetorial	359
B.3	Produtos escalar e vetorial algebricamente	360

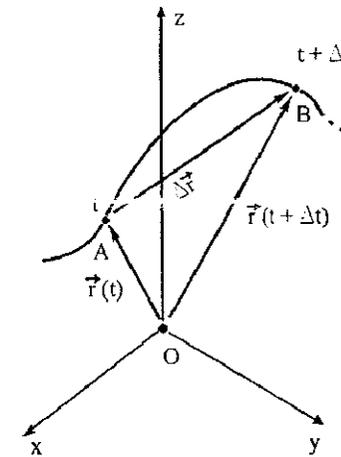
B.4	Operadores diferenciais	362
B.4.1	Gradiente	362
B.4.2	Divergência	362
B.4.3	Rotacional	363
B.5	Tensor	365
C	Resolução de alguns exercícios	371
D	Resposta de alguns exercícios	427

CAPÍTULO 1

Conceitos de velocidade e aceleração

Observe a Figura 1.1. Ela corresponde à trajetória de uma partícula referida a um certo sistema de eixos ortogonais x, y, z . No instante t , a partícula encontra-se na posição A e no instante posterior $t + \Delta t$, na posição B .

Figura 1.1: Trajetória de uma partícula.



Temos então que $\vec{r}(t)$ é o vetor posição da partícula no instante t ; $\vec{r}(t + \Delta t)$ é o vetor posição da partícula no instante posterior $t + \Delta t$ e $\Delta\vec{r}$ o vetor deslocamento da partícula entre os instantes considerados. Podemos diretamente relacionar estes três vetores como

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Seja agora a razão

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

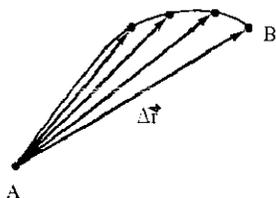
Ela é denominada *velocidade média* da partícula entre os instantes t e $t + \Delta t$. Vejamos mais precisamente o que esta razão significa. A partícula para ir de A até B seguiu a trajetória curva AB , gastando um tempo Δt para isto. A velocidade da partícula para todos os pontos da trajetória não é obviamente dada por (1.2). Esta relação representa a velocidade que a partícula teria para ir de A até B , no mesmo intervalo de tempo Δt , mas seguindo a trajetória retilínea dada pelo vetor $\Delta \vec{r}$.

Quanto menor $\Delta \vec{r}$, mais a velocidade média se aproxima das velocidades da partícula nos pontos da trajetória (a Figura 1.2 esclarece isto). A velocidade num ponto qualquer da trajetória (no caso do nosso exemplo, o ponto A) é obtida fazendo-se $\Delta \vec{r}$ (ou Δt) infinitamente pequeno, isto é,

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.3)$$

Como podemos observar, a velocidade é a derivada do vetor posição em relação ao tempo.

Figura 1.2: Deslocamentos menores entre A e B .



Na expressão (1.3), $d\vec{r}$ pode ser visto como um deslocamento infinitesimal correspondente ao intervalo de tempo também infinitesimal dt . Pela Figura 1.2, podemos também concluir que a velocidade num ponto da trajetória é tangente a trajetória neste ponto.

De maneira análoga definimos aceleração. Seja $\Delta \vec{v}$ a variação de velocidade entre t e $t + \Delta t$,

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t). \quad (1.4)$$

A aceleração média neste intervalo é definida como no caso da velocidade média, isto é,

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.5)$$

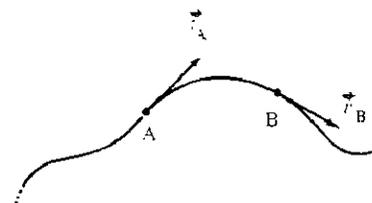
e a aceleração instantânea da partícula no instante t é então dada por

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.6)$$

Vimos que a velocidade num ponto da trajetória é tangente a esta trajetória neste ponto. No caso da aceleração, isto não acontece necessariamente. Expliquemos um pouco melhor esta parte. Consideremos que a Figura 1.3 represente a trajetória do movimento de uma certa partícula. Nos pontos A e B , as velocidades são \vec{v}_A e \vec{v}_B , respectivamente. A variação de velocidade entre esses dois pontos é

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A. \quad (1.7)$$

Figura 1.3: Exemplo de trajetória de uma partícula.



O vetor $\Delta \vec{v}$ está especificado na Figura 1.4 e é fácil concluir que a aceleração, em cada ponto, volta-se para dentro da concavidade da curva.

Seja finalmente um certo ponto P da trajetória. Consideremos a decomposição da aceleração em componentes paralela (\vec{a}_T) e perpendicular (\vec{a}_C) à trajetória, como mostra a Figura 1.5. Podemos, então, escrever

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C. \quad (1.8)$$

A primeira componente, tangente à trajetória (paralela a \vec{v}), é responsável pela variação do módulo do vetor velocidade. Já a componente \vec{a}_C , que está

voitada para o centro da trajetória no ponto P , produz variação do sentido de \vec{v} . É claro que um movimento com velocidade e aceleração paralelas é sempre retilíneo.

As componentes \vec{a}_T e \vec{a}_C são chamadas de *tangencial* e *centrípeta*, respectivamente. Veremos mais detalhes nos capítulos posteriores, principalmente durante as aplicações.

Figura 1.4: Representação gráfica do vetor $\Delta\vec{v}$.

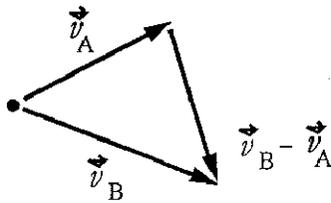
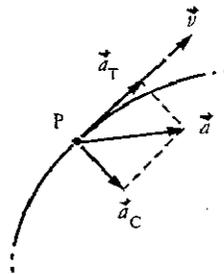


Figura 1.5: Componentes paralela e perpendicular da aceleração.



► Exercícios

1.1*. Obtenha as equações de movimento para o caso de aceleração constante no movimento unidimensional.

1.2. Seja o movimento de uma partícula sobre o eixo x . A posição da partícula em cada instante é dada por $x(t) = t^3 - 7,5t^2 + 18t + 3$ (t é medido em segundos e x em metros).

- Qual a posição da partícula no instante $t = 0$? E no instante $t = 1$ s? E para t infinito?
- Em que instantes a partícula pára?
- Qual a região onde a partícula está em movimento acelerado? Qual a região onde o movimento é retardado?
- Calcule $a(t)$.

1.3. Uma partícula, também em movimento unidimensional, possui aceleração dada por $a(t) = t^2 - 1$ (m/s^2).

- Sabendo-se que no instante $t = 0$ a velocidade da partícula é nula, calcule a velocidade da partícula num instante qualquer. Qual a velocidade da partícula para $t = 1$ s? E para $t = 2$ s?
- Sabendo-se ainda que no instante $t = 0$ a partícula está na posição $x = 1$ m, calcule a posição da partícula num instante qualquer. Qual a posição para $t = 1$ s? E para $t = 2$ s?
- Onde a partícula pára? Em que região o movimento é acelerado? Onde é retardado? Em que região a partícula está indo? Onde está voltando?
- Qual a velocidade e aceleração médias entre $t = 1$ s e $t = 2$ s?

1.4. Seja o movimento de uma partícula, numa dimensão, dado por $x(t) = A \sin \omega t$, onde A e ω são constantes.

- Em que região do eixo x o movimento ocorre?
- Quais os significados das constantes A e ω ?
- Calcule a velocidade e aceleração em cada ponto.

1.5*. O vetor posição \vec{r} de um ponto qualquer P no plano x, y fica também completamente caracterizado pelo seu módulo r e pelo ângulo θ que faz com o eixo x (r e θ são chamadas *coordenadas polares*). Podemos associar, aqui também, dois unitários, \hat{r} e $\hat{\theta}$, como aparecem especificados na Figura 1.6.

*Os exercícios marcados com asterisco encontram-se resolvidos no Apêndice C. Eles não são necessariamente os exercícios mais difíceis. Acho importante que você tente resolvê-los antes de olhar a solução.

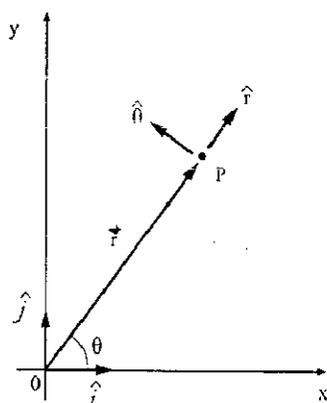
Expresse: a) o vetor \vec{r} em termos dos unitários \hat{i} e \hat{j} , b) o vetor \vec{r} em termos dos unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$, c) os unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$ em termos de \hat{i} e \hat{j} , d) os unitários \hat{i} e \hat{j} em termos de \hat{r} e $\hat{\theta}$.

Mostre também que

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = (\dot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

onde pontos sobre as letras significam, por convenção, derivadas em relação ao tempo. Obtenha os casos particulares para o movimento circular.

Figura 1.6: Exercício 5.



Deixe-me dizer que este exercício é muito importante. Procure entendê-lo completamente. Você terá a oportunidade de usar as relações acima muitas vezes no decorrer do nosso curso.

1.6*. Um corpo está se movendo sobre uma linha reta. Sua aceleração é dada por $a = -2x$, onde x é medido em metros e a em m/s^2 . Ache a relação entre a velocidade e a distância, dado que em $x = 0$, $v = 4 m/s$.

1.7. A aceleração de um corpo, movendo-se sob uma linha reta, é dada por $a = -kv^2$, onde k é uma constante positiva. É dado que em $t = 0$, $x = x_0$ e $v = v_0$. Ache a velocidade e a posição em função do tempo. Ache também v em função de x .

CAPÍTULO 2

As leis de Newton

Nos exercícios do capítulo anterior, vimos alguns exemplos sobre movimento de uma partícula. É importante ressaltar que, rigorosamente falando, não foi usado nenhum princípio físico na resolução dos exercícios. Apenas usamos as definições de velocidade e aceleração. A Física apareceria para justificar porque o movimento é ou não acelerado e o que estaria causando esta aceleração. Adiantemos que é a segunda lei de Newton juntamente com a expressão da força de interação sobre a partícula que nos dá isto.

Acho oportuno, logo no início, antes de apresentar o conteúdo físico da mecânica newtoniana, dizer o que deve ser entendido, de uma maneira geral, como procedimento físico na abordagem de um determinado problema. O diagrama abaixo caracteriza isto.

LEIS FÍSICAS



FORMULAÇÃO MATEMÁTICA



DESENVOLVIMENTO



RESULTADO

A física está presente não só na primeira parte, mas em todas as outras. É sempre importante saber o que as equações e as passagens intermediárias estão dizendo, mesmo antes do resultado final.

No presente capítulo, vamos estudar as leis de Newton. Faremos isto com algum cuidado, pois trabalharemos com elas até o Capítulo 10. Primeiramente, citemos que as leis de Newton são estabelecidas considerando-se os chamados *referenciais inerciais*¹. É justamente a primeira lei que se encarrega de defini-lo.

A fim de termos um visão conceitual de referencial inercial, comecemos citando que na natureza existem quatro tipos de interação:

- Interação gravitacional
- Interação eletromagnética
- Interação forte
- Interação fraca

As duas primeiras fazem parte do nosso dia-a-dia. Já as duas últimas podem não ser tão populares para vocês no momento. Estas manifestam-se a distâncias muito pequenas, onde só os efeitos quânticos são significativos. Não possuem relações clássicas, semelhantes aos casos do eletromagnetismo (*força de Lorentz*) e da gravitação (*lei da gravitação de Newton*)².

A força de Lorentz é o nome dado à força que atua sobre uma partícula de carga q , possuindo velocidade \vec{v} , quando na presença de um campo eletromagnético caracterizado pelos vetores \vec{E} e \vec{B} .

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.1)$$

Na expressão acima, $\vec{v} \times \vec{B}$ é o produto vetorial entre \vec{v} e \vec{B} . \vec{E} é o vetor *intensidade de campo elétrico* e \vec{B} é o vetor *indução magnética*. Só mais uma coisa, a relação (2.1) está escrita no sistema internacional de unidades.

A lei da gravitação de Newton dá-nos a força de interação entre duas massas m_1 e m_2 , separadas por uma distância r . O seu módulo vale

¹Referencial nada mais é do que um local onde você tenha, digamos, réguas para medir espaço e relógios para medir tempo. Para fazer estas medidas, precisamos de um sistema de eixos coordenados (veja Figura 1.1). Um trem é um exemplo de referencial. Dentro do trem, podem ser considerados vários sistemas de eixos coordenados.

²Esta nada tendo a ver, diretamente, com as leis de Newton que ora estamos procurando estabelecer.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

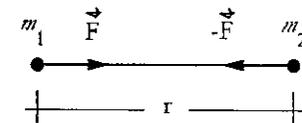
onde G é a chamada constante da gravitação universal

$$G = (6,670 \pm 0,005) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}, \quad (2.3)$$

que está expressa no sistema internacional de unidades. A Figura 2.1 esclarece quanto ao sentido³.

Como foi dito, para as interações fraca e forte não existem fórmulas como estas. Apenas para que você tenha uma idéia, a interação forte corresponde à força que mantém prótons e nêutrons unidos no interior do átomo, formando o núcleo atômico. Já a interação fraca corresponde, por exemplo, à força nas interações onde participam os neutrinos (partículas sem carga e provavelmente com uma massa muito pequena).

Figura 2.1: Força de interação entre duas massas.



Então, na natureza, só existem quatro tipos de força (pelo menos só estas são conhecidas no momento). Você poderia estar duvidando disto e perguntar: *E a força de atrito?*

Lembrando o que você já deve ter visto, a força de atrito é uma das componentes (componente horizontal) da força que aparece quando dois corpos estão em contato. A outra componente é a conhecida *força normal*. Estas forças não representam interações novas em relação às quatro acima mencionadas. Elas são de natureza eletromagnética. Pense um pouco no que é realmente o contato entre dois corpos. Pense em termos microscópicos. O contato corresponde às interações entre os átomos próximos às “superfícies” dos dois corpos. É claro que estas interações são, fundamentalmente, eletromagnéticas.

Apesar de tudo, existem certos tipos de força que não provêm de uma das quatro interações mencionadas (isto pode parecer um contra-senso em relação ao que dissemos de só existirem quatro interações, mas você verá que não).

³As interações entre dois corpos sempre se processam através de um par de forças (de mesmo módulo e sentidos opostos), uma atuando em cada corpo. Isto é justamente o conteúdo da 3.ª lei de Newton, conforme veremos daqui a pouco.

Por exemplo, a força que sentimos quando estamos dentro de um ônibus e este faz uma curva, ou freia, ou acelera. Outro exemplo é a força que atua sobre a água de um balde quando o amarramos a uma corda e o fazemos girar num movimento circular (esta força impede que a água derrame).

Quando dissemos que na natureza só existem quatro tipos de força, estávamos nos referindo às forças provenientes de uma interação. A força que os passageiros do ônibus sentem quando este entra numa curva não está relacionada a nenhuma das quatro interações. Ela só atua para as pessoas que estão no interior do ônibus. As pessoas que estão fora dele, mesmo perto, não sentem tal força (não confundir com problemas de deslocamento de ar). Esta força só existe para o referencial do ônibus (acelerado). Forças deste tipo, isto é, que só existem em certos referenciais, são chamadas de *forças fictícias* ou *forças inerciais*. Podemos então introduzir o conceito de *referenciais inerciais*. Estes são referenciais onde não existem forças fictícias.

Passemos agora ao enunciado das leis de Newton. Vamos de início simplesmente enunciá-las. Depois faremos alguns comentários.

1.^a lei: *Uma partícula livre (partícula que não está sujeita a nenhuma interação) ou está em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante.*

2.^a lei: *Quando uma partícula interage, seu estado de movimento é alterado da seguinte maneira*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.4)$$

onde \vec{F} é a resultante das forças que atuam sobre a partícula e \vec{p} é o seu momento linear, cuja definição não relativística é

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.5)$$

3.^a lei: *Quando duas partículas interagem, a força numa delas possui o mesmo módulo, mesma direção e sentido contrário à força que atua na outra.*

Conforme já dissemos, as leis de Newton encerram todo (ou quase todo) o conteúdo de física desta primeira parte do nosso curso. O que vamos fazer nada mais é do que aplicações destas leis. Antes, porém, é conveniente que façamos algumas observações a fim de entendermos claramente o que elas estão dizendo.

(i) A primeira lei de Newton, também chamada *lei da inércia* ou de *Galileu*, corresponde à apresentação do referencial inercial.

(ii) A segunda lei de Newton não nos diz qual o tipo de interação a que a partícula está sujeita. Ela relaciona a resultante das forças que atuam sobre a partícula com a variação de seu momento linear em relação ao tempo. Esta resultante pode ser de qualquer natureza (gravitacional ou eletromagnética). Assim, a segunda lei de Newton não é auto-suficiente para descrever o movimento da partícula, pois não sabemos o que é \vec{F} . Esta é uma informação adicional que tem de ser buscada na natureza. A definição de \vec{F} dependerá do tipo de interação. Por exemplo, considere que sobre uma partícula atuem N forças ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$), todas provenientes de uma interação pois estamos num referencial inercial. Assim, pela segunda lei de Newton, temos

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

onde, genericamente, \vec{F}_i pode ser gravitacional, força de atrito, força magnética etc.. Agora, para que a relação acima possa ser usada para descrever o movimento da partícula, é necessário o conhecimento da expressão de todas as forças.

(iii) Na relação (2.4) existe uma massa (dada através da definição de momento). Esta massa é chamada de *massa inercial*. Na expressão (2.2) (lei da gravitação de Newton⁴), aparecem outras massas que, em princípio, não precisam ter a mesma natureza daquela contida na relação (2.4). Estas são chamadas de *massas gravitacionais*. Experimentalmente, nunca se conseguiu detectar diferenças entre elas. Isto é um ponto importante na Física, no que diz respeito ao chamado *Princípio da Equivalência de Einstein* (ponto de partida da teoria da Relatividade Geral).

(iv) Ingenua e inadvertidamente, poderíamos pensar que a primeira lei de Newton decorre da segunda. Isto se deve porque fazendo $\vec{F} = 0$ na expressão da segunda lei de Newton, ou seja, considerando que a partícula não está sujeita a nenhuma interação, obtemos que o momento linear deve ser constante, exatamente como estabelece a primeira lei. Pode parecer então lógico concluir que a primeira lei seja decorrente da segunda. Chegar a esta conclusão seria o mesmo que dizer que não há necessidade de três leis, bastariam duas (!?).

Antes de qualquer explicação, deveríamos ficar desconfiados com esta conclusão. Newton juntamente com Galileu e Einstein são considerados os três maiores gênios que a Física já teve. Seria ingenuidade pensar que Newton

⁴Voltamos a chamar a atenção de que ela não é a segunda lei de Newton.

fosse suscetível a um erro como este. Não foi. São realmente necessárias as três leis.

O fato de chegarmos à conclusão de que o momento de uma partícula é constante quando não está sujeita a nenhuma interação é porque estamos num referencial inercial, que foi definido pela primeira lei. Esta conclusão nada mais é do que uma coerência entre as duas leis. Você poderia, então, perguntar o seguinte: *O fato de a resultante ser zero e o momento constante não significa que o referencial é necessariamente inercial?*

A resposta é não. A dinâmica de uma partícula pode incluir também forças fictícias. Neste caso, se a resultante é zero, o momento continua sendo constante, mas o referencial não é inercial. Assim, há necessidade (como Newton fez) de definir inicialmente o que é referencial inercial.

(v) A terceira lei é também chamada de *lei da ação e reação*. É importante ressaltar que o par de forças, correspondente à interação entre as duas partículas, contém uma força atuando em cada partícula. **As duas forças, ação e reação, nunca podem estar sobre o mesmo corpo.** É também importante ressaltar que este par de forças só ocorre para as forças de interação, isto é, **as forças fictícias não possuem reação.** Isto mais uma vez confirma a importância da primeira lei. Se o referencial não for inercial, a terceira lei não é válida para todas as forças que existem no referencial.

(vi) Acho oportuno falar na velocidade de propagação das interações. As leis de Newton subentendem que as interações se processam instantaneamente. Na realidade, isto não ocorre. Vejamos um exemplo, onde aproveitaremos para introduzir algumas informações que usaremos em outras oportunidades durante o nosso curso. Consideremos o sistema Terra-Sol. Estes dois astros estão separados pela distância de aproximadamente 150 milhões de quilômetros (veja Figura 2.2). Pela terceira lei de Newton, $\vec{F}_T = -\vec{F}_S$, e pela relação (2.2) temos

$$F_T = F_S = G \frac{M m}{r^2}, \quad (2.6)$$

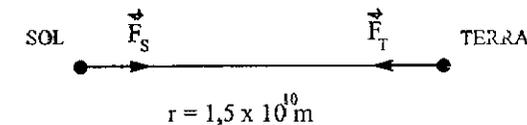
onde M é a massa do Sol e m a da Terra. Ambos estão sendo considerados como partículas⁵. Podemos usar aqui o seguinte raciocínio: tanto a Terra como o Sol (ou outro corpo massivo qualquer) criam em torno de si campos gravitacionais dados por

⁵No momento, estamos lidando apenas com partículas (corpos de dimensões desprezíveis para o contexto considerado) isoladas. Mais tarde veremos como lidar com sistemas de partículas e corpos rígidos (estes últimos nada mais são que um caso especial de sistema de partículas).

$$\begin{aligned} \vec{g}_T &= -G \frac{m}{r^2} \hat{r}_T, \\ \vec{g}_S &= -G \frac{M}{r^2} \hat{r}_S, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde \hat{r}_T é um unitário apontando para fora da Terra e \hat{r}_S para fora do Sol. Assim, \vec{g}_T aponta para o centro da Terra e \vec{g}_S para o centro do Sol. A Figura 2.3 esquematiza um trecho das linhas de campo gravitacional para uma certa massa distribuída esférica e homogeneamente (estas linhas preencheriam todo o espaço).

Figura 2.2: Sistema Terra-Sol.

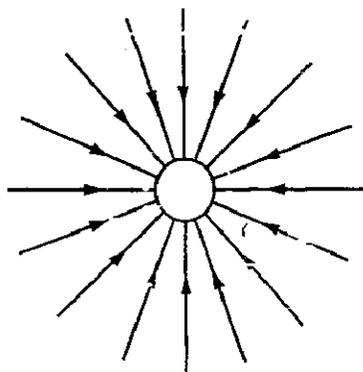


Tudo o que está sendo dito tem por objetivo concluir o seguinte, acerca do sistema Terra-Sol: **A Terra está numa região onde existe um campo gravitacional \vec{g}_S , criado pelo Sol, e este está numa região onde existe um campo gravitacional \vec{g}_T , criado pela Terra** [Observando as relações (2.7) vemos que o campo gravitacional criado pelo Sol é muito maior que o criado pela Terra]. Pelas relações (2.6) e (2.7) podemos escrever (usando a notação vetorial)

$$\begin{aligned} \vec{F}_T &= m \vec{g}_S, \\ \vec{F}_S &= M \vec{g}_T. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Consideremos, agora, que um agente qualquer afaste o Sol de sua posição. Sobre ele, então, atuará uma força diferente da anterior, pois o Sol estará numa posição onde o campo gravitacional terrestre possui valor diferente. Já sobre a Terra, levará um tempo de r/c (onde c é a velocidade com que a perturbação do campo gravitacional solar levará para atingir a Terra) para que percebamos as influências do deslocamento do Sol. Admitindo que c seja igual a da velocidade da luz (300.000 km/s), temos que este tempo, para a distância de 150 milhões de quilômetros, é de aproximadamente 8 minutos. A Figura 2.4 procura dar uma visão da perturbação do campo gravitacional se

Figura 2.3: Linhas de campo gravitacional.



propagando. Portanto, admitindo que a interação gravitacional se propague com uma velocidade igual à da luz, teremos que durante 8 minutos não será verificada a terceira lei de Newton, isto é, $\vec{F}_T \neq -\vec{F}_S$.

O exemplo que acabamos de discutir é apenas para entendermos um pouco melhor o conteúdo da terceira lei. Na verdade, durante o nosso curso, não chegaremos a usar a particularidade acima descrita. O fato de haver uma velocidade limite para a propagação das interações (verificada com o advento da Relatividade Especial) levou Einstein à conclusão de que a teoria da gravitação de Newton (que, diga-se de passagem, era um sucesso total) precisaria ser reformulada. A teoria relativística da gravitação, chamada de Relatividade Geral, foi desenvolvida por Einstein (o que levou cerca de treze anos).

Uma outra excessão para a terceira lei de Newton, que também não discutiremos aqui, vem da força magnética. Neste caso, parte do momento do sistema fica armazenado no campo magnético (veremos detalhes sobre isto no Capítulo 14).

Nos capítulos a seguir, veremos alguns exemplos gerais sobre aplicação das leis de Newton. Para finalizar esta parte, falemos um pouco sobre a região de validade da Mecânica Newtoniana, ou seja, onde as leis de Newton podem ser aplicadas seguramente para descrever o movimento. As leis de Newton são válidas para corpos de massa grande (comparativamente às massas das partículas elementares) e velocidades baixas (comparativamente à velocidade da luz). A tabela 2.1 esclarece o que foi dito, bem como menciona quais as teorias físicas que explicam os fenômenos fora da região de validade da

Mecânica Newtoniana. Nesta tabela, tomamos como referência a massa do elétron $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, e o símbolo \sim está significando “algo da mesma ordem de grandeza”.

Figura 2.4: Deformação no campo gravitacional se propagando. A perturbação corresponde à região entre as duas circunferências demarcadas na figura.

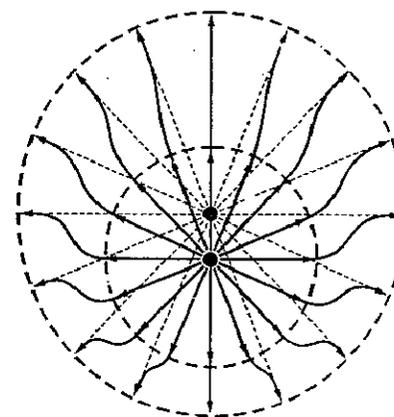


Tabela 2.1: Campos de atuação das teorias físicas.

$v \ll c$	$v \sim c$	
DOMÍNIO NEWTONIANO	TEORIA RELATIVÍSTICA (EINSTEIN)	$m \gg m_e$
TEORIA QUÂNTICA NÃO RELATIVÍSTICA	TEORIA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA	$m \sim m_e$

CAPÍTULO 3

Movimento sob interação gravitacional

Como vimos, o movimento de uma partícula nos *referenciais inerciais* está relacionado às interações que atuam sobre ela. Se não há nenhuma interação, ela ou fica parada ou desloca-se em linha reta com velocidade constante. Caso contrário, o movimento poderá ser acelerado (se a resultante das forças de interação for diferente de zero). Neste capítulo vamos estudar os movimentos para o caso da força de interação gravitacional.

Toda a física necessária para isto já foi apresentada a você. Ela é constituída pelas leis de Newton e a lei da gravitação (também devida à Newton), dada pela expressão (2.2). Assim, já estamos aptos a lidar com tais tipos de problema. Não há mais nada a ser apresentado.

3.1 Movimento próximo à superfície da Terra

Estes são movimentos tais que

$$r = R + h \simeq R. \quad (3.1)$$

onde R é o raio da Terra e h é a distância da partícula à superfície da Terra ($R \gg h$). O campo gravitacional terrestre para este caso é aproximadamente constante e dado por [veja seção anterior, mais especificamente as expressões (2.6) e (2.7)]

$$g_T = G \frac{m_T}{R^2} \simeq 9,8 \text{ ms}^{-2}. \quad (3.2)$$

onde usamos os valores numéricos

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}, \\ m_T &= 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}, \\ R &= 6,37 \times 10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

(estamos trabalhando no sistema internacional de unidades). O resultado acima, com certeza, é bem conhecido de vocês.

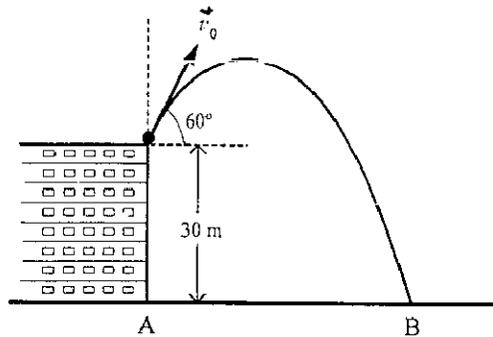
Então, a força que atua sobre uma partícula próxima à superfície da Terra é dada por [veja expressão (2.2) – lei da gravitação de Newton]

$$\vec{F} = -(9,8 m_p) \hat{r}, \quad (3.3)$$

onde m_p é a massa da partícula em quilogramas (conseqüentemente, \vec{F} está em *Newtons*).

Seja o seguinte exemplo. Consideremos uma pedra sendo atirada do topo de um edifício de 30 metros de altura, com uma velocidade de módulo 5 m/s e formando um ângulo de 60° com a horizontal. A Figura 3.1 mostra mais ou menos a trajetória seguida pela partícula (uma pedra perante a Terra pode ser tratada realmente como uma partícula)¹.

Figura 3.1: Pedra atirada do topo de um edifício.



Vamos calcular a velocidade² com que a pedra atinge o solo, onde isto

¹Não é necessário saber de antemão alguma coisa sobre a trajetória da partícula pelo contrário. As leis de Newton, juntamente com a lei da gravitação, dar-nos-ão isto. A trajetória traçada na Figura 3.1 é apenas uma ilustração.

²Quando falamos em velocidade, sem nenhuma observação, fica claro que estamos nos referindo à grandeza vetorial.

ocorre, em que instante atinge a altura máxima, a equação da trajetória e qual deveria ser o ângulo com a horizontal a fim de termos um alcance horizontal máximo (se você pensou em 45° não está certo).

Provavelmente, você já resolveu exercícios deste tipo e sabe resolver este também, usando uma meia dúzia (talvez mais) de equações. Vamos aqui usar a física. Já dissemos a você qual é. Primeiramente, temos de colocar um sistema de coordenadas para referir os dados do problema. Em princípio, podemos colocá-lo onde desejarmos. Entretanto, é claro, existem alguns mais adequados. A Figura 3.2 mostra-nos alguns. Todos eles são igualmente favoráveis para a resolução do problema. Usaremos o primeiro. Ficará como exercício você resolver este mesmo problema considerando os outros.

Mais uma observação. Todos estes sistemas de coordenadas estão localizados no referencial Terra. É este um referencial inercial? Claro que não. A Terra é um referencial acelerado, principalmente porque possui um movimento de rotação em torno de seu eixo. Há outros movimentos de menores efeitos que são em torno do Sol, em torno do centro da galáxia como parte do sistema solar etc. Em termos práticos, conseguir um referencial inercial é, como você já pode estar notando, algo praticamente impossível. O que ocorre é que existem referenciais que são aproximadamente inerciais para o tipo de movimento que estamos tratando. Isto é o que se passa para o presente problema, onde podemos considerar a Terra como um referencial aproximadamente inercial.

Durante o movimento, atua sobre a partícula só a força gravitacional (estamos desprezando a resistência do ar). De acordo com o sistema de eixos que estamos utilizando, temos (veja expressão 3.3)

$$\vec{F} = -(10 m_p) \hat{j}, \quad (3.4)$$

onde m_p é a massa gravitacional do corpo (em kg). Estamos tomando o campo gravitacional terrestre com o valor aproximado de 10 ms^{-2} a fim de simplificar o trabalho algébrico. Trabalharemos neste problema com dois algarismos significativos.

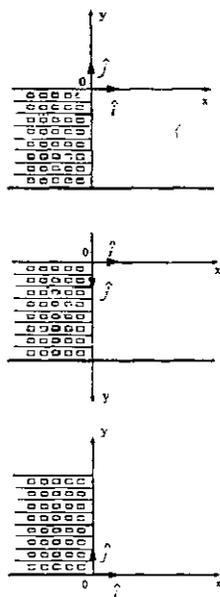
A força \vec{F} que aparece em (3.4) é uma força resultante. Então, pela segunda lei de Newton

$$\vec{F} = m_p \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3.5)$$

Aqui, m_p é a massa inercial. Podemos dizer que a física principal do problema está contida nas equações (3.4) e (3.5). Daqui para a frente faremos os desen-

volvimentos e interpretação dos resultados (o que não deixa de ser importante - veja o diagrama no início do Capítulo 2).

Figura 3.2: Exemplos de sistemas de coordenadas.



Combinando estas duas equações e tendo em conta o que falamos no Capítulo 2 sobre a equivalência entre massas inercial e gravitacional, obtemos³

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -10\hat{j}, \quad (3.6)$$

cujas solução é⁴

$$\vec{v}(t) = -10t\hat{j} + \vec{v}_0, \quad (3.7)$$

onde \vec{v}_0 é a velocidade no instante $t = 0$ (quando a pedra está saindo do topo do prédio). De acordo com os dados da Figura 3.1, temos

³A Eq. (3.6) permite a determinação experimental do campo gravitacional terrestre. Ela é igual à aceleração que um corpo adquire em queda livre.

⁴Observe que, realmente, derivando-se (3.7) em relação ao tempo obtém-se (3.6).

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = 5 \cos 60^\circ \hat{i} + 5 \sin 60^\circ \hat{j} = \frac{5}{2} \hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \hat{j}. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.8) em (3.7), encontramos

$$\vec{v}(t) = \frac{5}{2} \hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 10t \right) \hat{j}. \quad (3.9)$$

Como $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, obtemos também

$$\vec{r}(t) = \frac{5}{2} t \hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} t - 5t^2 \right) \hat{j}, \quad (3.10)$$

onde a constante $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ é zero, de acordo com as condições iniciais do problema.

Para calcular o instante em que a pedra atinge o solo, usamos a informação de que isto ocorre quando a componente y de \vec{r} vale -30 metros. Portanto, da equação (3.10) tiramos

$$-30 = \frac{5\sqrt{3}}{2} t - 5t^2. \quad (3.11)$$

Há duas soluções para este instante,

$$t = 2,9 \text{ s} \quad \text{e} \quad t = -2,1 \text{ s}. \quad (3.12)$$

É no instante $t = 2,9 \text{ s}$ que a pedra atinge o solo. Por que o valor $t = -2,1 \text{ s}$ não serve? O que significa este tempo negativo?

Então, a pedra atinge o solo a uma distância horizontal de [basta tomar a componente x de \vec{r} , dado por (3.10), e fazer t igual a $2,9 \text{ s}$]

$$x = \frac{5}{2} \times 2,9 = 7,3 \text{ m}. \quad (3.13)$$

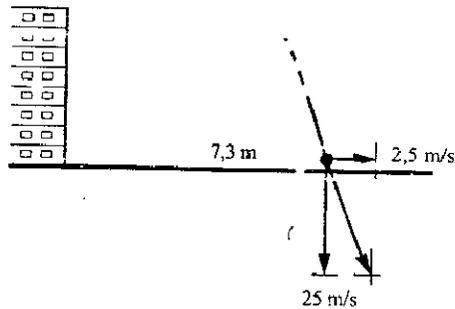
A velocidade neste ponto é [diretamente calculada a partir da equação (3.9) - veja Figura 3.3]

$$\vec{v} = \frac{5}{2} \hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 29 \right) \hat{j} = (2,5 \hat{i} - 25 \hat{j}) \text{ m/s}. \quad (3.14)$$

Passemos agora ao cálculo do instante onde a partícula atinge a altura máxima. Isto ocorre, obviamente, quando $v_y = 0$. Assim, da equação (3.9) temos

$$-10t + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow t = 0,43 \text{ s}. \quad (3.15)$$

Figura 3.3: Pedra atingindo o solo.



A equação da trajetória já está dada por (3.10). Ela é uma equação expressa em termos do parâmetro t . Entretanto, se desejarmos uma equação do tipo $y = f(x)$ podemos obtê-la diretamente da própria equação (3.9), convenientemente escrita como

$$\begin{aligned}x &= \frac{5}{2}t, \\y &= \frac{5\sqrt{3}}{2}t - 5t^2.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Eliminando o tempo entre essas duas equações, vem

$$y = -0,80x^2 + 1,7x, \quad (3.17)$$

que é a equação de uma parábola.

Tratemos finalmente do ângulo com que a pedra deveria ter sido arremessada (em lugar dos 60° do problema) a fim de termos um alcance máximo. Chamemos este ângulo genericamente de θ . Assim, em lugar de (3.10), é fácil concluir que o resultado deve ser

$$\vec{r}(t) = 5 \cos \theta t \hat{i} + (5 \sin \theta t - 5t^2) \hat{j}. \quad (3.18)$$

Observe que fazendo $\theta = 60^\circ$ obtém-se o caso particular da Eq. (3.10). Pelos dados do problema, a partícula atinge o solo em $y = -30\text{ m}$. Assim,

$$-30 = -5t^2 + 5 \sin \theta t \Rightarrow t = \frac{\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 24}}{2}. \quad (3.19)$$

Por que não consideramos o instante negativo? Substituindo o valor acima de t na expressão de $x(t)$, vem

$$\begin{aligned}x &= 5 \cos \theta \frac{\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + 24}}{2} \\&= \frac{5}{2} \left(\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta + 24} \right).\end{aligned}\quad (3.20)$$

Por esta expressão, vemos que x é uma função de θ . Temos então um problema onde queremos saber qual o valor de θ para termos x máximo. Assim, fazemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= 0 \\&\Downarrow \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta + 24} + \cos \theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 24}} &= 0 \\&\Downarrow \\ (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sqrt{\sin^2 \theta + 24} - \sin \theta (24 + \sin^2 \theta) + \sin \theta \cos^2 \theta &= 0.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Pela natureza do problema, esta condição está relacionada a x máximo, pois x mínimo é claramente zero. Deixemos tudo em termos de $\sin \theta$. É só questão de um pequeno trabalho algébrico chegar a

$$26 \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \theta = 11^\circ. \quad (3.22)$$

que não é 45° como muitos esperavam.

Qual deveria ser o ângulo para o alcance ser máximo se a pedra atingisse o solo em $y = 0$, isto é, se ela fosse lançada no nível do solo? (Agora sim você deve achar 45° .)

Acabamos de estudar um exemplo de movimento próximo à superfície da Terra. Neste caso, a lei da gravitação de Newton

$$\vec{F} = m_p \vec{g} \quad (3.23)$$

é usada com $\vec{g} = -9,8 \hat{r} \text{ m/s}^2$. Erroneamente, a expressão (3.23) é muitas vezes confundida com a segunda lei de Newton. A esta altura, você já sabe muito bem que segunda lei de Newton e lei da gravitação (também devida à Newton) não são a mesma coisa.

3.2 Movimento afastado da superfície da Terra

A física para tratar este tipo de movimento é a mesma da seção anterior. Não há nada de novo a ser acrescentado. Apenas temos de fazer algumas adaptações às presentes condições.

Com o uso da segunda lei de Newton e da lei da gravitação, é possível mostrar que as órbitas no movimento planetário são, de uma maneira geral (e não apenas tomando a Terra como referência), elípticas, hiperbólicas ou parabólicas. Deixaremos este estudo, isto é, mostrar que as órbitas podem ser elípticas, hiperbólicas ou parabólicas, para quando estudarmos os princípios de conservação. Isto evita algumas dificuldades de ordem matemática e fica mais cômodo. Vamos discutir, nesta seção, apenas dois exemplos particulares. Entretanto, acho importante que, mesmo sem resolver o problema geral, você seja apresentado a ele, a fim de que se tenha consciência de qual é a dificuldade matemática de que estou falando.

Seja um corpo de massa m em interação com a Terra, mas afastado dela, como mostra a Figura 3.4. A única força que atua sobre o corpo é a força gravitacional,

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}. \quad (3.24)$$

Como \vec{F} é a força resultante, podemos usá-la na expressão da segunda lei de Newton. Assim, obtemos

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (3.25)$$

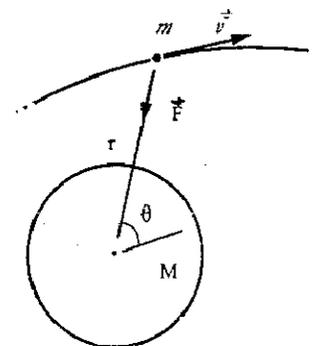
Fazendo o mesmo comentário do exemplo anterior, frisemos que o uso das leis físicas termina aqui.

É possível mostrar que o movimento é plano. Como não é nossa intenção, no momento, tratar todo este problema com detalhes, deixaremos esta demonstração para mais tarde. Substituamos, então, a expressão da aceleração em coordenadas polares, que são as mais apropriadas para o problema (veja exercício I.5 e não se esqueça de ler o comentário que fiz logo após o enunciado),

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (3.26)$$

Da equação acima obtemos o seguinte par de equações diferenciais:

Figura 3.4: Corpo em interação gravitacional com a Terra.



$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} &= 0, \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como vemos, este sistema não é de solução simples. Ele é formado por equações onde as variáveis r e θ aparecem acopladas. Como disse, voltaremos à solução geral do problema quando estudarmos os princípios de conservação. Por ora, vamos discutir os dois exemplos particulares de que falamos.

O primeiro deles é o caso de movimento circular ($r = \text{constante}$). Fazendo então $r = \text{constante}$ nas expressões (3.27), vem

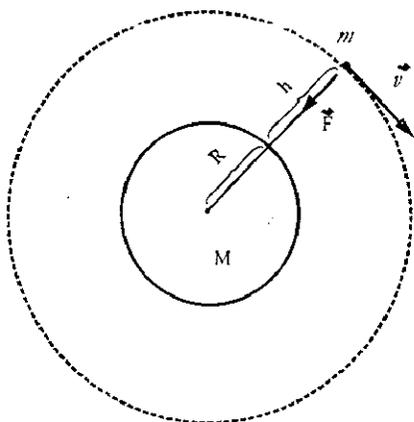
$$r\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^2}. \quad (3.28)$$

$$\ddot{\theta} = 0. \quad (3.29)$$

O resultado dado por (3.29) diz que $\dot{\theta}$ (velocidade angular, geralmente chamada de ω) é constante. Temos então que o movimento, além de circular é uniforme (veja Figura 3.5). A quantidade $r\dot{\theta}^2 = \omega^2 r$ é a conhecida aceleração centrípeta⁵

⁵Este é apenas um nome dado a esta aceleração. É comum o estudante, ainda inexperiente, achar que ao ser multiplicada por uma massa ela corresponde a uma força extra no problema. Não é nada disto. Espero que este não seja o caso de vocês.

Figura 3.5: Corpo em órbita circular em torno da Terra.



Usando que $\omega = 2\pi/T$ (movimento circular uniforme), sendo T o período do movimento, encontramos

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3. \quad (3.30)$$

A conclusão acima constitui uma das chamadas *leis de Kepler*⁶ do movimento planetário, mais especificamente a terceira lei: *O quadrado do período de revolução é proporcional ao cubo do raio* (caso de órbitas circulares).

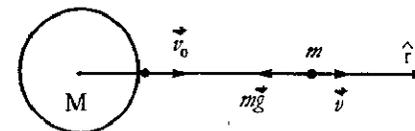
Para termos uma visão um pouco mais quantitativa, consideremos que o satélite esteja numa órbita onde $h = 3000 \text{ km}$. Como o raio da Terra vale $R = 6400 \text{ km}$, é imediato obter que, para esta altura, $T = 1 \text{ h } 25 \text{ min}$ e $g = 4,5 \text{ m/s}^2$.

Seja agora o segundo exemplo. Você sabe que jogando um corpo para cima, ele vai até um certo ponto, pára e, depois, volta. Aumentando-se a velocidade inicial, ele atinge um ponto mais alto. Deve existir, então, uma certa velocidade inicial tal que, para velocidades superiores a ela, o corpo vai e nunca mais volta (esta velocidade é chamada *velocidade de escape* da superfície da Terra). É este exatamente o objetivo do nosso exemplo. Queremos calcular esta velocidade. Teoricamente, esta seria a velocidade capaz de fazer o corpo

⁶O nome "leis de Kepler" se mantém por questão histórica. Elas resultam da teoria de gravitação de Newton e de suas leis de movimento.

ir até o infinito e chegando lá com velocidade nula. Veja a Figura 3.6, onde aparece o corpo numa posição do movimento, afastando-se da Terra.

Figura 3.6: Corpo afastando-se da Terra.



Com o uso da segunda lei e da lei da gravitação, obtemos

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (3.31)$$

(que é a física do problema). Como no exemplo anterior, os resultados não dependerão da massa do corpo. Tendo em conta que o movimento é em uma dimensão e $\vec{v} = v \hat{r}$, não precisamos usar a notação vetorial. Assim, temos

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (3.32)$$

Observe que esta equação também poderia ter sido obtida a partir da relação geral (3.26), fazendo-se $\theta = \text{constante}$.

Do jeito como está, a equação acima não dá para ser manuseada, pois ela contém três variáveis (v , t e r). Vamos reescrever o lado esquerdo de (3.32) convenientemente, a fim de eliminar a variável t . Usando a regra de derivação em cadeia, vem

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} \\ &= \frac{dv}{dr} v. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Combinando (3.32) e (3.33), encontramos

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (3.34)$$

A solução desta equação é uma mera questão de integração.

$$\int_{v_0}^0 v dv = -GM \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^0 = \frac{GM}{r} \Big|_R^\infty \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (3.35)$$

Esta é a expressão da velocidade de escape. Substituindo os valores numéricos ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$, $M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ e $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$), encontramos

$$v_0 = 1,1 \times 10^4 \text{ m/s} \simeq 40\,000 \text{ km/h.} \quad (3.36)$$

Esta é realmente a velocidade aproximada que uma nave espacial, por exemplo, deve ter para se libertar do campo gravitacional terrestre.

No caso da Lua, onde $M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$ e $R_L = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$, esta velocidade seria bem menor.

$$v_0 = 2,4 \times 10^3 \text{ m/s} \simeq 8\,500 \text{ km/h.} \quad (3.37)$$

Você já viu algum filme sobre as viagens do *Projeto Apolo*? Você reparou na facilidade com que os astronautas saíram da Lua comparativamente com a Terra? Os resultados acima explicam isto. Eles explicam também porque a Terra consegue manter uma atmosfera e a Lua não. No caso da Terra, a velocidade (térmica) das moléculas de ar é menor do que $40\,000 \text{ km/h}$ e no caso da Lua seria maior que $8\,500 \text{ km/h}$.

3.3 Movimento no interior da Terra

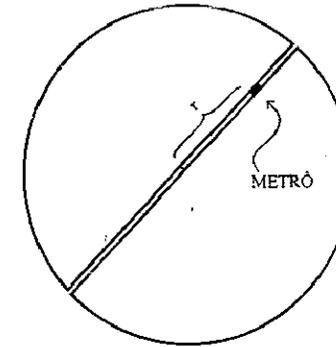
O título desta seção parece um pouco estranho, mas você vai ver que faz sentido e é algo também interessante. Vimos inicialmente movimentos próximos à superfície da Terra. Em seguida, discutimos um pouco os movimentos afastados dela. Agora, vamos considerar um exemplo de movimento dentro da Terra. Seja um metrô (talvez do futuro) passando pelo centro da Terra, como mostra a Figura 3.7. Consideremos que o trem tenha partido do repouso, de um ponto situado na superfície da Terra (estação do metrô). Estamos querendo saber a equação de movimento e quanto tempo levará para atingir a outra extremidade (por exemplo, uma viagem Rio - Tóquio).

Quanto à física a ser usada, nada muda em relação aos casos já discutidos. Pela segunda lei de Newton e pela lei da gravitação, chegamos a

$$\vec{a} = \vec{g}, \quad (3.38)$$

onde \vec{g} é, agora, o campo gravitacional dentro da Terra. Precisamos saber a expressão deste campo. Imediatamente, é fácil concluir que \vec{g} não pode ser o mesmo da superfície, isto é, $-9,8\hat{r} \text{ m/s}^2$ (\hat{r} , como já vimos, é o unitário na direção radial, apontando para fora), nem ter a mesma expressão para pontos

Figura 3.7: Metrô passando pelo centro da Terra.



externos, $-(GM/r^2)\hat{r}$. Observe que, por questões de simetria, \vec{g} deve ser zero no centro da Terra. Vamos então, primeiramente, deduzir a expressão de \vec{g} para pontos dentro da Terra.

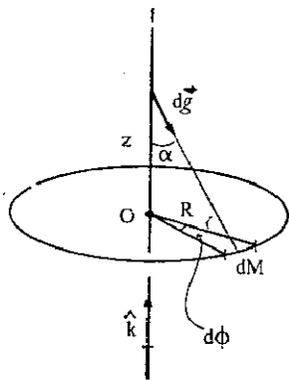
Consideremos a Terra com uma distribuição de massa esférica e homogênea. Procuraremos fazer este cálculo de forma sistemática. Começemos calculando o campo gravitacional devido a um anel de massa M e raio R , para um ponto do eixo de simetria do anel como mostra a Figura 3.8 (é pedido como exercício para calcular diretamente o campo gravitacional criado por uma casca esférica com o uso de coordenadas esféricas). A quantidade $d\vec{g}$ é o campo gravitacional criado pela massa dM , que sabemos ser dado por (em módulo)

$$|d\vec{g}| = G \frac{dM}{R^2 + z^2}. \quad (3.39)$$

No cálculo de \vec{g} criado pelo anel, é fácil perceber que a componente $|d\vec{g}|\sin\alpha$ não dará contribuição (para cada elemento de massa dM do anel há um elemento simétrico do lado oposto). Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -\hat{k} \int |d\vec{g}| \cos\alpha = -\hat{k} \int G \frac{dM}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \\ &= -\hat{k} G \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^M dM = -\hat{k} GM \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Este é o campo gravitacional criado por um anel de massa M e raio R para pontos sobre o seu eixo de simetria. Colocando uma partícula de massa m

Figura 3.9: Campo gravitacional criado por um trecho de massa dM do círculo.

num ponto deste eixo, ela sofrerá uma força dada por $m\vec{g}$ (lei da gravitação), onde \vec{g} é dado por (3.40). Você poderia dizer, qualitativamente, o tipo de movimento desta partícula?

O cálculo de \vec{g} para pontos fora do eixo de simetria é um problema complicado. Ele cai na resolução das chamadas integrais elípticas que, quase sempre, só podem ser feitas por métodos numéricos. É fácil perceber também que o campo gravitacional do planeta Saturno tem de levar em conta contribuições (embora pequenas) do tipo acima mencionado, devido à presença dos seus anéis.

Agora que sabemos o campo gravitacional criado por um anel, calculemos então o campo gravitacional criado por uma casca esférica. Ela pode ser vista como a superposição de vários anéis (veja Figura 3.9). A contribuição do anel de raio x no ponto P é dada por (utilizando diretamente a relação 3.40)

$$d\vec{g} = -G dM \frac{r-y}{[x^2 + (r-y)^2]^{3/2}} \hat{r}, \quad (3.41)$$

onde dM é a massa do anel. Ela corresponde à superfície lateral de um tronco de cone, gerado pela linha de comprimento ds . Assim, considerando que $M/4\pi R^2$ é a densidade superficial de massa da casca, temos

$$dM = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi x ds = \frac{Mx ds}{2R^2}. \quad (3.42)$$

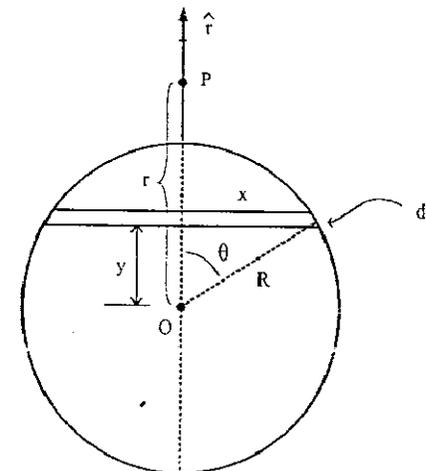
Combinando as expressões (3.41) e (3.42), vem

$$d\vec{g} = -GM \frac{(r-y) x ds}{2R^2 [x^2 + (r-y)^2]^{3/2}} \hat{r}. \quad (3.43)$$

Vamos expressar todas as variáveis que aparecem na relação (3.43) em termos de uma só. Escolhamos a variável θ , que está especificada na Figura 3.9. Obtemos, então,

$$d\vec{g} = -GM \frac{\text{sen } \theta (r - R \cos \theta) d\theta}{2 [R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}} \hat{r}. \quad (3.44)$$

Figura 3.9: Esfera como superposição de vários anéis.



O campo gravitacional \vec{g} é portanto dado por

$$\vec{g} = -\frac{GMr}{2} \hat{r} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \theta d\theta}{[R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}} + \frac{GM R}{2} \hat{r} \int_0^\pi \frac{\text{sen } \theta \cos \theta d\theta}{[R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}}, \quad (3.45)$$

A resolução das duas integrais que aparecem na expressão acima ficará como um exercício. O resultado é

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}} = \begin{cases} \frac{2}{r(r^2 - R^2)} & r > R \\ \frac{2}{R(R^2 - r^2)} & r < R \end{cases}, \quad (3.46)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{[R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}} = \begin{cases} \frac{2R}{r^2(r^2 - R^2)} & r > R \\ \frac{2r}{R^2(R^2 - r^2)} & r < R \end{cases}. \quad (3.47)$$

Substituindo (3.46) e (3.47) em (3.45), encontramos

a) Para pontos externos ($r > R$),

$$\bar{g} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}. \quad (3.48)$$

Como podemos observar, o campo gravitacional de uma casca esférica de massa M , para pontos externos, é análogo ao campo gravitacional criado por uma massa pontual M localizada no centro da casca. É então fácil perceber que o campo gravitacional criado por uma esfera homogênea (uma esfera é a superposição de várias cascas) apresenta as mesmas características para pontos no seu exterior. Aliás, já havíamos feito uso desta propriedade intuitivamente em algumas oportunidades.

b) Para pontos internos ($r < R$)

$$\bar{g} = 0. \quad (3.49)$$

A casca não cria campo gravitacional em seu interior. Se colocarmos uma certa massa no interior da casca (onde quer que seja), ela não ficará sujeita a nenhuma força gravitacional.

Agora, podemos voltar ao nosso problema inicial. Observando a Figura 3.7, é fácil concluir que o metrô sofrerá interação gravitacional devido à massa subentendida pela esfera de raio r (a camada que vai de r até R não exerce nenhuma força no metrô). Assim, o valor de \bar{g} para pontos situados a uma distância r do centro da Terra ($r < R$) é dado por

$$\bar{g} = -\frac{GM'}{r^2} \hat{r}, \quad (3.50)$$

onde M' é a massa subentendida pela esfera de raio r . O relacionamento entre M' e M pode ser diretamente obtido. Considerando que $M/\frac{4}{3}\pi R^3$ é a densidade volumétrica de massa, temos

$$M' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}. \quad (3.51)$$

Combinando (3.50) e (3.51), vem

$$\bar{g} = -\frac{GM}{R^3} r \hat{r} = -\frac{GM\bar{r}}{R^3}. \quad (3.52)$$

Como estamos vendo, o campo gravitacional no interior da superfície da Terra cresce com a distância ao seu centro, contrariamente com os pontos no exterior onde \bar{g} decai com r^2 (observe que, realmente, $\bar{g} = 0$ no centro da Terra).

Substituindo (3.52) em (3.38), obtemos

$$\bar{a} = -\frac{GM}{R^3} \bar{r}. \quad (3.53)$$

Ou seja, sobre o metrô atua uma força resultante que é do tipo da que atua sobre uma massa presa a uma mola, isto é, proporcional ao deslocamento e de natureza restauradora. O metrô descreverá portanto um movimento harmônico simples (o movimento harmônico simples será estudado com detalhes no Capítulo 5).

Como o movimento é sempre numa mesma direção, podemos escrever

$$\frac{dv}{dt} \hat{r} = -\frac{GM}{R^3} \hat{r} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^3}. \quad (3.54)$$

De acordo com o que já fizemos anteriormente (veja Seção 2), temos

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} &= -\frac{GM}{R^3} \Rightarrow v dv = -\frac{GM}{R^3} r dr \Rightarrow \int_0^v v dv = -\frac{GM}{R^3} \int_r^R r dr \\ \Rightarrow \frac{v^2}{2} &= \frac{GM}{2R^3} (R^2 - r^2) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R^3} (R^2 - r^2)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Observando o resultado dado por (3.55), vemos que o metrô não poderá ir além de $r = R$, pois o módulo de \bar{v} (ou de qualquer outro vetor) não pode ser imaginário. A velocidade máxima ocorre em $r = 0$ e é dada por $v = \sqrt{GM/R}$, que é $\sqrt{2}$ vezes menor que a velocidade de escape da Terra (veja relação 3.35). Calculemos agora a expressão de $r(t)$. Da relação (3.55), obtemos

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{R^3} (R^2 - r^2)} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} dt. \quad (3.56)$$

Para resolver esta integral, fazemos a substituição trigonométrica $r = R \sin \phi$ (com o intuito de eliminar o radical). Assim,

$$d\phi = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} dt \Rightarrow \phi = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} t + \text{const.} \quad (3.57)$$

Voltando às variáveis de iniciais, temos

$$\text{arc sen } \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} t + \text{const.} \Rightarrow r = R \text{sen} \left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t + \text{const.} \right). \quad (3.58)$$

Como para $t = 0$, $r = R$, a constante da relação anterior deve ser portanto $\pi/2$. Assim,

$$r(t) = R \text{sen} \left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.59)$$

que é a equação de movimento do metrô. A quantidade $\sqrt{GM/R^3}$ é a frequência angular. Isto é,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}, \quad (3.60)$$

onde T é o período do movimento. O tempo de viagem é, portanto, meio período. Substituindo os valores numéricos na relação acima encontraremos que o tempo de viagem é apenas 42 minutos!

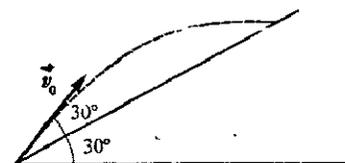
► Exercícios

3.1. Discutir o exemplo da Seção 1 considerando os outros sistemas de eixos mostrados na Figura 3.2.

3.2. Um corpo é atirado sobre um plano inclinado com uma velocidade inicial de módulo igual a 5 m/s , como mostra a Figura 3.10. Qual o alcance, computado sobre a superfície do plano inclinado? Com que velocidade a partícula atinge a superfície do plano? Qual deveria ser o ângulo do vetor velocidade com o plano para haver alcance máximo?

3.3. Qual deve ser a altura em relação à superfície da Terra para que o campo gravitacional seja 1% menor do que aquele medido sobre a superfície?

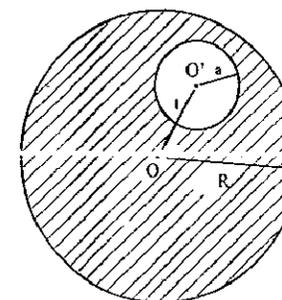
Figura 3.10: Exercício 2.



3.4. A que altura um satélite de comunicação deve ser colocado em órbita, no plano do equador? Qual é o valor do campo gravitacional nos pontos desta órbita?

3.5*. Calcular o campo gravitacional no interior de um buraco esférico de uma distribuição de massa homogênea, também esférica, de densidade ρ , como mostra a Figura 3.11. Compare com o caso particular da casca esférica discutida no texto.

Figura 3.11: Exercício 5.



3.6. Considere o dispositivo de massas mostrado na Figura 3.12, onde m e m' são aproximadamente massas pontuais. Quais as forças que atuam em M , m e m' ?

3.7. Calcule o campo gravitacional criado por um disco de raio R e massa M para pontos sobre o eixo de simetria perpendicular ao disco (veja Figura 3.13).

Para pontos onde z muito grande perante R , o disco parecerá um ponto. Faça esta aproximação no resultado que você encontrou e verifique se é obtida a relação do campo gravitacional de uma massa pontual.

Figura 3.12: Exercício 6.

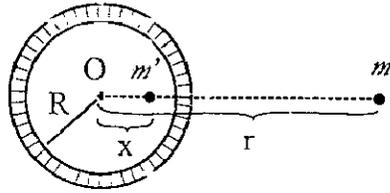
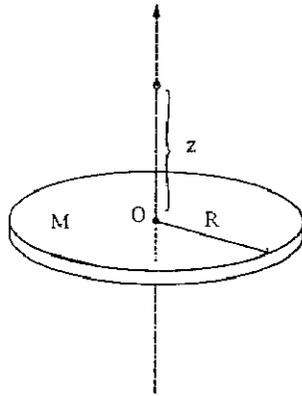


Figura 3.13: Exercício 7.



Calcule, depois, o campo gravitacional criado por uma esfera de massa M e raio R , para pontos fora da esfera, fazendo a superposição de vários discos.

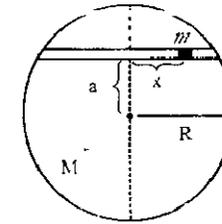
3.8. Resolva as integrais (3.46) e (3.47).

3.9*. Calcule o campo gravitacional criado por uma casca esférica de raio R e massa M , para pontos dentro e fora da casca, usando diretamente coordenadas esféricas.

3.10. Mostre que o movimento do metrô da Figura 3.14 (desprezando o atrito) é também harmônico simples. Calcule o período do movimento e compare-o com o obtido no texto.

3.11. Você viu que o campo gravitacional criado por uma massa M , distribuída uniformemente ao longo de um anel de raio R , para pontos do eixo de simetria z , é dado por [veja expressão (3.40)]

Figura 3.14: Exercício 10.



$$\vec{g} = -\frac{GMz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

a) Verifique se este resultado é consistente com o campo gravitacional criado por uma massa pontual fazendo $z \gg R$.

b) Uma massa m ($m \ll M$) é solta do repouso de uma altura h do eixo de simetria z . Calcule a velocidade v em função de z . É possível, desta expressão, dizer, qualitativamente, como vai ser o movimento?

CAPÍTULO 4

Movimento considerando forças de contato

No capítulo anterior, estudamos movimentos só levando em conta a força gravitacional. No presente capítulo, vamos estudar movimentos onde aparecem, também, forças devido ao contato do corpo com um objeto qualquer do sistema. Conforme discutimos no Capítulo 2, estas forças são de natureza eletromagnética, pois elas são decorrentes da interação entre os átomos das “superfícies” em contato.

4.1 Força de tensão e força normal

Estes são casos bem comuns. Consideremos, por exemplo, um corpo de massa M preso a uma corda e esta fixa no ponto superior, pendendo verticalmente. Para darmos uma generalidade maior ao exemplo, consideremos também que a massa da corda não seja desprezível (veja Figura 4.1). Vamos aplicar as leis de Newton ao corpo (massa M) e à corda (massa m). Para tal, precisamos saber com quem eles estão interagindo, pois, só assim, poderemos identificar as forças que atuam sobre eles. Não é difícil fazer isto, mas requer um pouco de atenção a fim de não colocarmos forças que não existem.

O bloco interage com a Terra e com a corda. Esta interage com o bloco, com a Terra e com o pino que a prende no teto. Assim, sobre o bloco atuam duas forças e sobre a corda três. A Figura 4.2 mostra essas forças com detalhes. É importante observar a utilização da terceira lei de Newton. Por exemplo, na interação entre o bloco e a corda há uma força no bloco e outra na corda (\vec{T} e $-\vec{T}$). Elas possuem o mesmo módulo, mesma direção e sentidos contrários. O mesmo ocorre nas demais interações (no caso da interação com a Terra, a outra força está no centro da Terra).

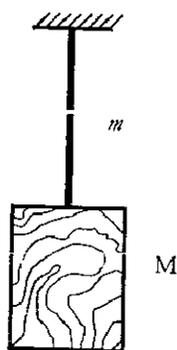
Agora, com o uso da segunda lei de Newton, podemos relacionar essas for-

ças. Tanto o bloco como a corda estão em repouso, isto é, possuem aceleração zero. Assim (as forças estão todas numa única dimensão, não vamos escrever a notação vetorial explicitamente)

$$\begin{aligned} T - Mg &= 0, \\ T' - mg - T &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Vamos aproveitar para fazer duas observações: Na primeira das relações acima, encontramos que $T = Mg$. Isto leva muitas vezes o estudante a concluir, erroneamente, que a força na corda é a reação do peso. Pelo que explicamos anteriormente, e pelo que estamos falando desde o Capítulo 2, espero que este não seja mais o caso de vocês. A outra observação refere-se à segunda das equações (4.1). Note que a força que a corda exerce sobre o pino é diferente da que ela exerce sobre o corpo. Elas só seriam iguais (em módulo) se a massa da corda fosse desprezível.

Figura 4.1: Bloco pendurado numa corda.



Uma outra força de contato aparece quando o corpo está colocado sobre uma superfície. Consideremos como exemplo inicial um bloco de massa M colocado em repouso sobre uma mesa. Veja Figura 4.3, onde marcamos as forças que atuam sobre o bloco. São duas forças. Uma proveniente da interação com a superfície, que estamos chamando de \vec{N} (*força normal*), e outra da interação gravitacional com a Terra. Onde estão as reações dessas forças?

Figura 4.2: Forças que atuam no bloco e na corda.

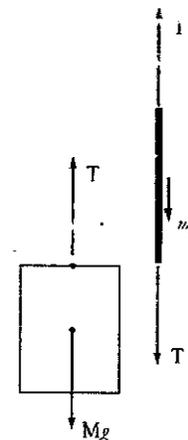
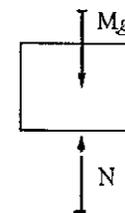


Figura 4.3: Bloco colocado sobre uma superfície.

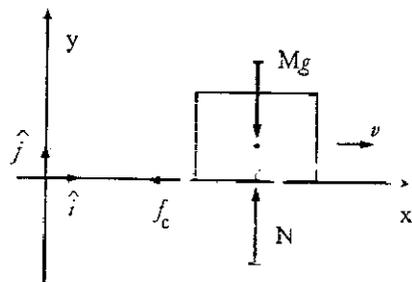


4.2 Forças de atrito estático e cinético

A interação entre o bloco e a mesa pode ser mais geral do que o caso considerado acima. Pode haver também uma componente horizontal, que é a força de atrito. No caso da Figura 4.3, mesmo que haja atrito entre as superfícies, a força de atrito é nula. Ela só aparece se empurrarmos o corpo sobre a mesa, entrando ele ou não em movimento. Vamos inicialmente supor que tenhamos dado um empurrão no corpo tal que ele tenha entrado em movimento. É um fato da nossa experiência diária que o corpo irá parar num determinado instante. Isto se deve principalmente à força de atrito entre o bloco e a mesa, que é chamada de *atrito cinético*. A Figura 4.4 mostra um instante do movimento

do bloco, quando ele está com uma certa velocidade \vec{v} .

Figura 4.4: Bloco em movimento sobre uma superfície com atrito.



Estamos chamando de \vec{f}_c a força de atrito cinético. A expressão desta força é experimentalmente conhecida. Seu módulo é dado por

$$f_c = \mu_c N, \quad (4.2)$$

e o seu sentido está sempre se opondo ao movimento¹. A quantidade μ_c é uma constante chamada *coeficiente de atrito cinético*. Esta constante depende apenas da natureza das superfícies em contato (não depende, por exemplo, das áreas destas superfícies).

Este movimento é facilmente estudado com o uso da segunda lei de Newton. De acordo com os dados da Figura 4.4, temos

$$N\hat{j} - Mg\hat{j} = 0 \Rightarrow N = Mg, \quad (4.3)$$

$$\vec{f}_c = M\vec{a}_x \Rightarrow -\mu_c N\hat{i} = M a_x \hat{i} \Rightarrow M a_x = -\mu_c N. \quad (4.4)$$

Combinando estas duas equações, encontramos

$$a_x = -\mu_c g. \quad (4.5)$$

Esta é a aceleração que atua sobre o corpo².

Há um outro tipo de atrito chamado *atrito estático*, que ocorre quando superfícies em contato não possuem deslizamento entre elas. Entretanto, isto

¹Só no caso de atrito cinético é que a força se opõe ao movimento. No caso de atrito estático, que veremos daqui a pouco, isto nem sempre acontece

²Não seja tentado a ficar decorando estas fórmulas. O que você deve procurar fazer é entender a aplicação das leis de Newton (corretamente).

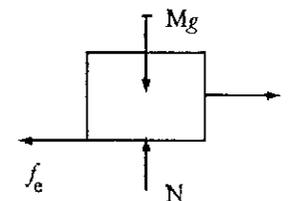
não significa, necessariamente, que não possa haver movimento quando a força de atrito estático está atuando. Pode sim. Um exemplo imediato é o de um carro quando não está derrapando, isto é, quando o rolamento é perfeito. A força de atrito entre os pneus e o solo é de natureza estática. Embora haja movimento, não há deslizamento entre os pneus e o solo (movimento sem derrapagem).

A força de atrito estático é dada por uma desigualdade

$$f_e \leq \mu_e N. \quad (4.6)$$

O porquê disto pode ser facilmente entendido através do seguinte exemplo: Seja um bloco em repouso numa superfície. Sobre ele atuamos uma força horizontal \vec{F} para tentar pô-lo em movimento, mas consideremos que não estamos conseguindo. Na Figura 4.5, estão representadas todas as forças que atuam sobre o bloco.

Figura 4.5: Forças que atuam sobre um bloco em repouso sobre uma mesa.



\vec{N} e \vec{f}_e são interações com a superfície. $M\vec{g}$ é a interação com a Terra. A força \vec{F} , como dissemos, é uma força aplicada sobre o corpo. é a interação com a pessoa que o está puxando.

Por experiência própria, sabemos que não é qualquer força que põe em movimento um corpo em repouso sobre uma superfície (verifique isto tentando empurrar uma mesa). Conforme \vec{F} aumenta, \vec{f}_e aumenta também (tal que $\vec{F} = -\vec{f}_e$) até um certo limite ($f_{e,max}$). Só a partir daí é que o corpo começará a se deslocar. Isto explica, portanto, a desigualdade da relação (4.6).

É também um fato cotidiano que após o corpo entrar em movimento é mais fácil mantê-lo em movimento do que foi fazê-lo iniciar. Isto significa que, para um mesmo par de superfícies,

$$\mu_c \leq \mu_e. \quad (4.7)$$

Acho oportuno ratificar o que foi dito na observação sobre atrito cinético. É comum ouvir-se dizer que a força de atrito possui sentido contrário ao do movimento. Isto é verdade, como vimos, para o caso do atrito cinético, mas não o é, necessariamente, para o atrito estático. Um corredor que se desloca aceleradamente para a frente é devido à força de atrito estático que está atuando em seus pés para a frente.

4.3 Atrito viscoso

Quando estudamos o movimento sob interação gravitacional, para movimentos próximos à superfície da Terra, não levamos em conta a interação devido ao contato do corpo com as moléculas de ar. Vamos fazer isto agora. A natureza desta interação é, como já vimos, fundamentalmente eletromagnética, tendo em conta o caráter microscópico do fenômeno. Macroscopicamente, pode-se chegar, através de experiências, à expressão da força que atua sobre o corpo, chamada de *atrito viscoso*.

$$\vec{f} = -b\vec{v}, \quad (4.8)$$

desde que a velocidade \vec{v} não seja muito grande, pois poderá haver contribuições de termos não lineares na velocidade. b é uma constante positiva (a força de atrito viscoso possui, portanto, sentido contrário à velocidade) que depende de dois fatores: a forma do corpo (uma folha de papel caindo sofre efeitos diferentes dependendo se está aberta ou amassada) e o tipo de fluido (para um mesmo corpo e uma mesma velocidade, um movimento na água possui força de atrito viscoso maior do que no ar).

Consideremos um exemplo. Seja um corpo solto de uma certa altura próximo à superfície da Terra, a partir do repouso. As forças que atuam sobre o corpo, durante seu movimento, estão especificadas na Figura 4.5. A resultante é

$$\vec{F} = (mg - bv)\hat{j}. \quad (4.9)$$

Pela segunda lei de Newton, vem

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{dv}{dt} \hat{j}, \quad (4.10)$$

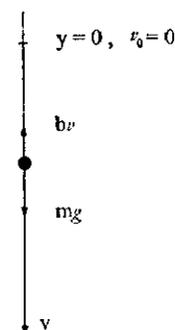
pois $\vec{v} = v\hat{j}$. Combinando (4.9) e (4.10), encontramos

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv \Rightarrow \frac{m dv}{mg - bv} = dt. \quad (4.11)$$

Fazendo a integração desta equação e usando as condições de contorno especificadas no início, temos

$$\begin{aligned} -\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-bdv}{mg - bv} &= \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{mg - bv}{mg} = -\frac{bt}{m} \\ \Rightarrow 1 - \frac{bv}{mg} &= e^{-\frac{bt}{m}} \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Figura 4.6: Movimento vertical com atrito viscoso.



Notamos que para $t \rightarrow \infty$, temos $v = mg/b = \text{constante}$. A força de atrito viscoso vai aumentando com a velocidade até atingir um valor máximo, que é igual ao peso (isto ocorre teoricamente num tempo infinito). A partir daí o corpo possui resultante nula e sua velocidade é, conseqüentemente, constante. É isto que ocorre, por exemplo, com os paraquedistas.

É claro que o resultado dado por (4.12) deve coincidir com o caso particular conhecido, $v = gt$, se fizermos $b = 0$. Verifiquemos este ponto. Substituindo este valor de b na relação (4.12), notamos que uma indeterminação é obtida. Esta indeterminação é resolvida usando-se a conhecida expansão

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{mg}{b} \left(1 - 1 + \frac{bt}{m} - \frac{1}{2} \frac{b^2 t^2}{m^2} + \frac{1}{6} \frac{b^3 t^3}{m^3} - \dots\right) \\ &= gt \left(1 - \frac{bt}{2m} + \frac{b^2 t^2}{6m^2} - \dots\right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Fazendo agora na relação (4.13) $b = 0$, obtemos o resultado esperado. isto é, $v(t) = gt$.

Partindo de $v(t)$ dado por (4.12), calcule você mesmo $y(t)$. Você deverá encontrar, para as condições especificadas na Figura 4.6, que

$$y(t) = \frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{bt}{m}} - \frac{m}{b} \right). \quad (4.14)$$

Faça as aproximações $t \rightarrow \infty$ e $b = 0$ e verifique se os resultados conhecidos são obtidos.

Consideremos mais um exemplo envolvendo atrito viscoso. No exemplo discutido na Seção 1 do capítulo anterior, vimos que a equação da trajetória de um corpo sob ação da força gravitacional é uma parábola (quando a resistência do ar é desprezada). Vejamos agora qual é a equação da trajetória quando levamos em conta esta força de atrito. Consideremos o sistema de eixos especificado na Figura 4.7, onde \vec{v}_0 é a velocidade inicial ($t = 0$). O uso direto da segunda lei de Newton fornece

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= -mg\hat{j} - b\vec{v} \\ \Rightarrow m \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + m \frac{dv_y}{dt} \hat{j} &= -mg\hat{j} - bv_x \hat{i} - bv_y \hat{j}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Em termos das componentes, temos

$$m \frac{dv_x}{dt} = -bv_x, \quad (4.16)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - bv_y. \quad (4.17)$$

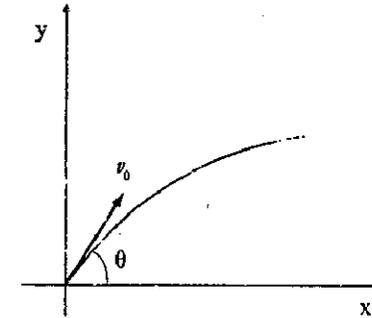
A partir de (4.16), calculamos $v_x(t)$ e $x(t)$. Os resultados são

$$v_x(t) = v_{0x} e^{-\frac{b}{m}t}, \quad (4.18)$$

$$x(t) = \frac{mv_{0x}}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (4.19)$$

Analogamente, usando (4.17) calculamos $v_y(t)$ e $y(t)$.

Figur. 4.7: Condições iniciais para o lançamento do corpo.



$$v_y(t) = \left(\frac{mg}{b} + v_{0y} \right) e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}, \quad (4.20)$$

$$y(t) = \left(\frac{m^2g}{b^2} + \frac{mv_{0y}}{b} \right) \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right) - \frac{mg}{b} t. \quad (4.21)$$

Eliminando o tempo entre (4.19) e (4.21), obtemos a equação da trajetória

$$y = \left(\frac{mg}{bv_{0x} \cos \theta} + \tan \theta \right) x + \frac{m^2g}{b^2} \ln \left(1 - \frac{bx}{mv_{0x} \cos \theta} \right), \quad (4.22)$$

que é algo bem mais complicado do que a parábola obtida no caso sem atrito viscoso.

► Exercícios

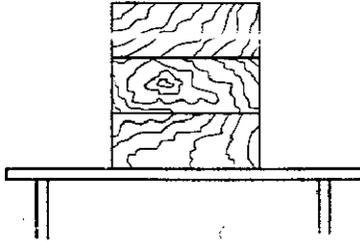
4.1*. Sejam três blocos, cada um com massa $M = 5 \text{ kg}$ e em repouso sobre uma mesa, como mostra a Figura 4.8. Existe um coeficiente de atrito estático 0,2 e cinético 0,1 para cada par de superfícies.

a) Num determinado instante, uma força de 25N é aplicada ao corpo do meio. Calcule a aceleração de cada bloco.

b) Idem para uma força de 50N.

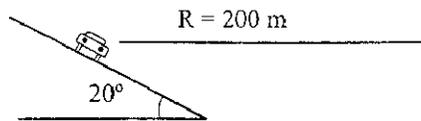
4.2. Seja uma curva de raio 200m. Considere que o plano da curva encontra-se inclinado de 20° com a horizontal (a Figura 4.9 mostra um corte da curva). É

Figura 4.8: Exercício 1.



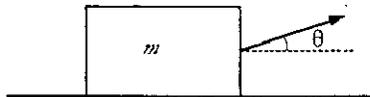
possível o carro fazer a curva sem o uso da força de atrito? Explique. Qual deve ser a sua velocidade.

Figura 4.9: Exercício 2.



4.3*. Seja um bloco de massa m , apoiado numa superfície horizontal. Considere μ_c o coeficiente de atrito cinético entre as superfícies. Calcule θ para que a força \vec{F} , capaz de fazer o corpo se mover com aceleração \vec{a} , paralela ao plano, seja a menor possível (veja Figura 4.10).

Figura 4.10: Exercício 3.

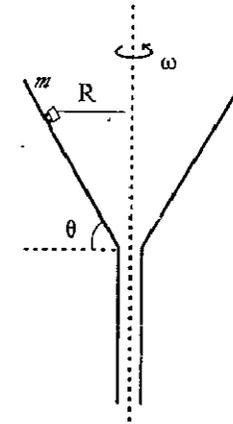


4.4. Um pequeno cubo de massa m é colocado no interior de um funil que gira em torno de um eixo com velocidade angular ω . A parede do funil forma um ângulo θ com a horizontal. Seja μ o coeficiente de atrito estático entre o cubo e o funil e R a distância entre o cubo e o eixo de rotação (veja Figura 4.11).

a) Faça um diagrama mostrando as forças que atuam sobre o cubo.

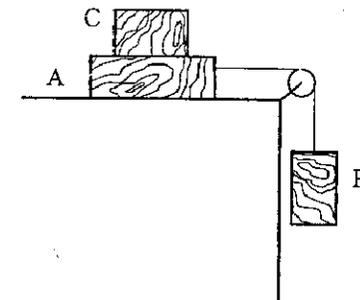
b) Existem dois valores de ω , um máximo e um mínimo, para que o cubo permaneça em repouso relativamente ao funil. Calcule esses valores.

Figura 4.11: Exercício 4.



4.5. Seja o dispositivo mostrado na Figura 4.12. O atrito entre o corpo A e a superfície onde está apoiado é desprezível. Existe atrito entre os corpos A e C dado por $\mu_e = 0,2$. Qual deve ser a massa mínima de C para que ele não deslize sobre A ? Dados: $m_A = 5,0 \text{ kg}$ e $m_B = 2,5 \text{ kg}$.

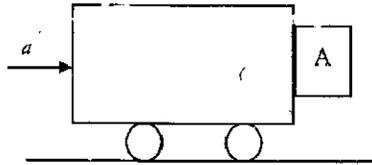
Figura 4.12: Exercício 5.



4.6. O coeficiente de atrito entre a caixa A e o carro, mostrado na Figura 4.13, vale $0,5$. A massa da caixa é 2 kg .

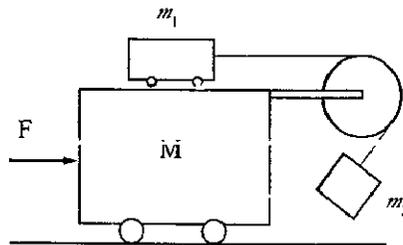
- a) Quais as forças que atuam sobre a caixa? Onde estão as reações?
 b) Qual a aceleração mínima do carro (e da caixa) para que a caixa não caia?
 c) Sendo a aceleração maior que este mínimo, a força de atrito aumenta?

Figura 4.13: Exercício 6.



4.7*. Qual é a força horizontal \vec{F} que deve ser aplicada ao conjunto mostrado na Figura 4.15 de modo que m_1 não se mova relativamente a M . Os dados são: $m_1 = 5,0 \text{ kg}$, $m_2 = 4,0 \text{ kg}$ e $M = 21 \text{ kg}$. Despreze os atritos.

Figura 4.14: Exercício 7.



4.8*. Calcule a aceleração de cada um dos blocos da Figura 4.15. Despreze os atritos, as massas dos fios e das roldanas.

4.9. Uma massa grande M pende estacionária de uma corda que passa por um pequeno tubo e está presa a uma pequena massa m , que gira num movimento circular como mostra a Figura 4.16. Seja l o comprimento da corda entre m e a extremidade superior do tubo. Calcule θ e o período de revolução em termos destes dados.

4.10. Duas massas m e uma terceira massa M estão ligadas conforme mostra a Figura 4.17. O sistema pende do ponto A e as massas giram com uma velocidade

Figura 4.15: Exercício 8.

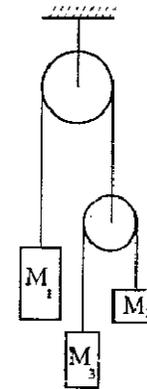
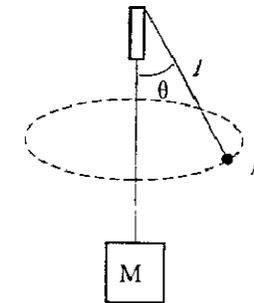


Figura 4.16: Exercício 9.



angular ω em torno do eixo AB . A massa M fica estacionária em B . Considere $\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{DA} = l$. Pergunta-se (considere como dados m , M , g , l e ω)

- a) Quais as forças de tensão nos cabos AC e CB ?
 b) Calcule o ângulo θ .

4.11. A Figura 4.18 representa a chamada *máquina de Atwood*. Calcule a aceleração das massas m_1 e m_2 (suponha $m_1 > m_2$). Despreze a massa da roldana e o atrito desta com o eixo.

4.12. Um homem de massa $M = 100 \text{ kg}$ está subindo, juntamente com uma plataforma de massa $m = 50 \text{ kg}$ com uma aceleração de módulo $a = 5,0 \text{ m/s}^2$

Figura 4.17: Exercício 10.

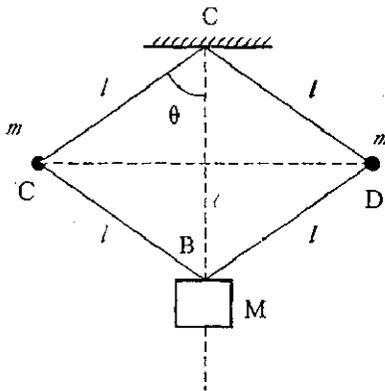
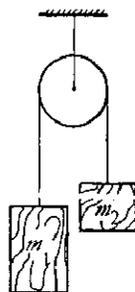


Figura 4.18: Exercício 11.



(veja Figura 4.19). Calcule as forças que o homem exerce sobre a corda e a plataforma, bem como a força que a corda da polia exerce sobre o teto que a fixa.

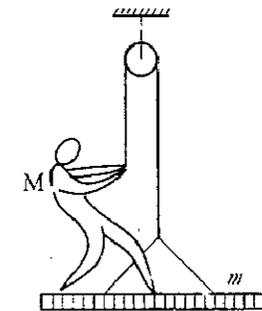
4.13. Obtenha a expressão de $y(t)$ dada por (4.14).

4.14. Obtenha as expressões (4.18) – (4.22).

4.15. Considerando $bx \ll mv_{0x}$, obtenha a seguinte aproximação para a expressão (4.22)

$$y = \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 - \frac{bg}{3m v_0^3 \cos^3 \theta} x^3.$$

Figura 4.19: Exercício 12.



Assim, a equação da trajetória começa como uma parábola, mas conforme x vai crescendo y decai mais rapidamente que uma parábola. Mostre que a expressão do alcance para a aproximação acima é dada por

$$A = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} - \frac{4 v_0^3 b \sin 2\theta \sin \theta}{3 m g^2}.$$

Qual deve ser θ para termos alcance máximo?

CAPÍTULO 5

Movimento de um corpo sob ação de uma mola

À primeira vista, este parece ser um caso muito particular de movimento. Entretanto, vocês terão oportunidade de ver que a natureza geral dele (não o caso particular do corpo preso a uma mola) é bem ampla, é um dos sistemas mais usados na Física. O exemplo que discutimos na Seção 3.3, do metrô passando pelo centro da Terra, é da mesma natureza do movimento que vamos discutir aqui. Um outro exemplo é o do pêndulo simples, para oscilações de pequenas amplitudes.

5.1 Só a mola atuando

Seja um bloco de massa m preso a uma mola como mostra a Figura 5.1. No primeiro caso, a mola está na sua posição de equilíbrio (não está esticada nem comprimida), ela não exerce nenhuma força sobre o corpo. Ela só exercerá uma força sobre o corpo se estiver esticada ou comprimida. Estiquemos então a mola com o corpo até uma determinada posição (veja a segunda das figuras V.1) e a soltemos. A terceira figura mostra o sistema num certo instante, quando o corpo está numa posição x em relação à posição de equilíbrio.

Para estudar este movimento, vamos, como de praxe, colocar as forças que atuam sobre o corpo. Desprezemos os atritos. Temos que o corpo possui três interações: uma com a mola, uma com a Terra e uma com a superfície (no caso só a força normal aparece, pois estamos desconsiderando o atrito). Há, portanto, três forças atuando sobre o corpo. Elas estão marcadas na Figura 5.2, onde estamos chamando de \vec{F} a força exercida pela mola.

A expressão da força \vec{F} é conhecida. Ela é dada por

$$\vec{F} = -kx\hat{i}, \quad (5.1)$$

Figura 5.1: Corpo sob ação de uma mola.

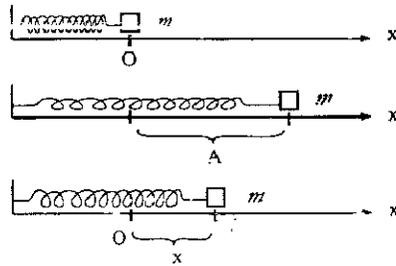
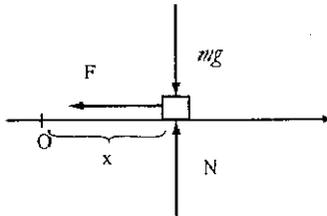


Figura 5.2: Forças que atuam sobre o corpo.



onde x representa o deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio da mola (veja Figura 5.1). O sinal menos que aparece na relação (5.1) é importante. Ele significa que a força está sempre voltada para a origem. Ela é de natureza restauradora, como esclarece a Figura 5.3.

Para tentar conhecer como é o movimento do corpo, vamos usar a segunda lei de Newton. Notamos que, no caso do sistema que estamos descrevendo, \vec{F} é a força resultante. Assim, a segunda lei de Newton nos dá

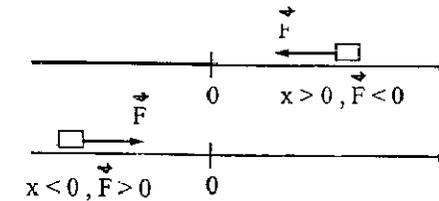
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -kx \hat{i}. \quad (5.2)$$

Como o movimento é sempre no eixo dos x , podemos evitar a notação vetorial e escrever simplesmente (pois $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{i}$)

$$m \frac{dv}{dt} = -kx. \quad (5.3)$$

Poderíamos resolver esta equação como foi feito no exemplo da Seção 3.3, ou seja, escrevendo $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$. Procedendo desta maneira, obteríamos pri-

Figura 5.3: A força da mola é de natureza restauradora.



meiramente $v(x)$ e depois $x(t)$. Entretanto, vamos aproveitar a oportunidade para seguir outro caminho, matematicamente mais amplo, o qual voltaremos a utilizar em outras situações neste mesmo capítulo. Vamos calcular diretamente $x(t)$ a partir de (5.3). Primeiramente, reescrevamos esta equação como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.4)$$

Matematicamente, esta equação é classificada como uma *equação diferencial linear e homogênea*. Começemos explicando estes nomes. Uma equação diferencial linear e homogênea possui a seguinte forma geral:

$$T u = 0, \quad (5.5)$$

onde T é um operador do tipo

$$T = \frac{d^n}{dt^n} + \alpha_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1(t) \frac{d}{dt} + \alpha_0(t), \quad (5.6)$$

e u é uma função de t , cuja dependência explícita deverá ser obtida ao se resolver a equação. O operador T , dado por (5.6), é dito ser de n -ésima ordem. Portanto, a equação (5.4) é uma equação diferencial de segunda ordem. Os coeficientes $\alpha_i(t)$ são funções arbitrárias de t . No caso do nosso exemplo, eles são constantes. Esta particularidade torna a solução da nossa equação diferencial bem mais fácil.

A denominação *linear* vem do fato de o operador T , dado por (5.6), ser um operador linear. Um operador T é dito *linear* se

$$T(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 T u_1 + c_2 T u_2, \quad (5.7)$$

onde c_1 e c_2 são constantes e u_1 e u_2 são funções. Por último, a denominação *homogênea* está relacionada à forma da relação (5.5). Uma *equação diferencial linear não homogênea* teria o seguinte aspecto

$$Tu = v. \quad (5.8)$$

Vamos agora resolver a equação (5.4). Não é difícil perceber que, num caso geral, a solução de uma equação diferencial linear e homogênea, cujos coeficientes são constantes, deve ser do tipo $e^{\lambda t}$, pois derivadas da função exponencial geram-na novamente. O parâmetro λ deve ser determinado convenientemente a fim de que $e^{\lambda t}$ seja realmente solução da equação diferencial que estamos querendo resolver. Substituindo então x por $e^{\lambda t}$ na Eq. (5.4), encontramos

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right) e^{\lambda t} = 0. \quad (5.9)$$

Esta relação será verdadeira para qualquer valor de t se

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5.10)$$

onde $i = \sqrt{-1}$

Há dois valores de λ que fazem com que $e^{\lambda t}$ seja solução de (5.4). Há portanto duas soluções para esta equação. Não é difícil perceber que, de uma maneira geral, uma equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem, com coeficientes constantes, possui n soluções. As duas soluções da nossa equação são: $e^{i\sqrt{k/m}t}$ e $e^{-i\sqrt{k/m}t}$. Devido ao fato de o operador ser linear, podemos combinar essas duas soluções numa única solução geral

$$x = c_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \quad (5.11)$$

onde c_1 e c_2 são duas constantes que devem ser determinadas de acordo com as condições iniciais do problema.

Através de um pequeno desenvolvimento algébrico, podemos reescrever a expressão (5.11) de uma outra maneira, através de duas novas constantes, que serão mais apropriadas para o movimento que estamos estudando. Seja então,

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + i c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t, \\ &+ c_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t - i c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t, \\ &= (c_1 + c_2) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + i(c_1 - c_2) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Fazendo

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= A \sin \alpha, \\ i(c_1 - c_2) &= A \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.13)$$

encontramos

$$\begin{aligned} x &= A \sin \alpha \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + A \cos \alpha \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \\ &= A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

As duas novas constantes do movimento são A e α , cujos significados são: A corresponde ao valor máximo de x (em módulo). O movimento é oscilatório e A é a amplitude do movimento (veja Figura 5.1). A quantidade α é um parâmetro que está relacionado com as condições iniciais do problema. Por exemplo, se em $t = 0$, $x = 0$, temos $\alpha = 0$ (ou $n\pi$ para n inteiro). Se em $t = 0$, $x = A$, temos $\alpha = \pi/2$ (ou $2n\pi + \pi/2$).

A velocidade da partícula em cada instante é

$$v = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha \right). \quad (5.15)$$

Como dissemos, o movimento é oscilatório. Chama-se *período* o intervalo de tempo decorrido após a partícula readquirir as mesmas características que possuía num certo instante anterior, isto é, readquirir a mesma posição e velocidade. Assim, chamando o período de T temos

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha \right) = A \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + T) + \alpha \right] \quad (5.16)$$

e também

$$v(t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha\right) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}} (t + T) + \alpha\right]. \quad (5.17)$$

Obviamente, para que as equações (5.16) e (5.17) sejam verdadeiras deveremos ter

$$\sqrt{\frac{k}{m}} T = 2\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = \omega. \quad (5.18)$$

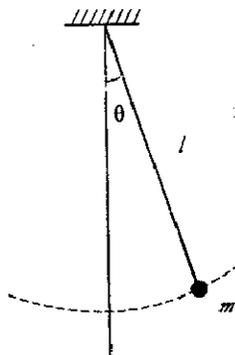
A quantidade ω é chamada de *frequência angular*. No presente caso, $\omega = \sqrt{k/m}$ (no exemplo discutido na Seção 3.3, tínhamos $\omega = \sqrt{GM/R^3}$). A quantidade $f = 1/T$ é denominada *frequência*.

5.1.1 Pêndulo simples

No início deste capítulo, falamos que o movimento harmônico simples aparece em várias situações e que o pêndulo simples é um destes casos. Vamos mostrar que, realmente, o pêndulo simples, para pequenas oscilações descreve um movimento harmônico simples.

Chamamos de pêndulo simples o sistema onde uma massa, de dimensões desprezíveis, oscila num plano vertical presa a um fio de massa também desprezível (veja Figura 5.4).

Figura 5.4: Pêndulo simples.

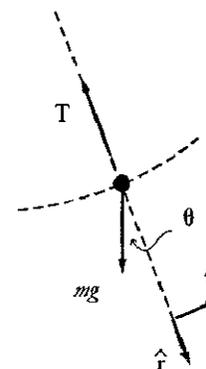


O corpo de massa m possui duas interações: uma com a Terra e outra com o fio. Como sabemos, a cada uma dessas interações corresponde uma força.

Elas estão marcadas na Figura 5.5. A componente tangente à trajetória da força resultante é dada por $-mg \sin\theta \hat{\theta}$. Usando a segunda lei de Newton, ao longo da trajetória, temos

$$-mg \sin\theta \hat{\theta} = m \frac{d\vec{v}}{dt} (\vec{v} = v \hat{\theta}) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g \sin\theta. \quad (5.19)$$

Figura 5.5: Forças que atuam sobre m .



O sinal menos que aparece em (5.19) é em decorrência do fato de a força ser restauradora. A trajetória descrita pela partícula é um trecho de círculo de raio l . Assim,

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}. \quad (5.20)$$

Substituindo este resultado em (5.19), encontramos a seguinte equação (diferencial)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0, \quad (5.21)$$

que para pequenos ângulos ($\sin\theta \simeq \theta$) pode ser escrita como¹

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (5.22)$$

¹Acho oportuno mencionar que a solução de (5.21) não é algo trivial.

Esta equação é do tipo que caracteriza o movimento harmônico simples (compare-a com (5.4)). Portanto, a frequência angular do pêndulo simples, para pequenas oscilações, é

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.23)$$

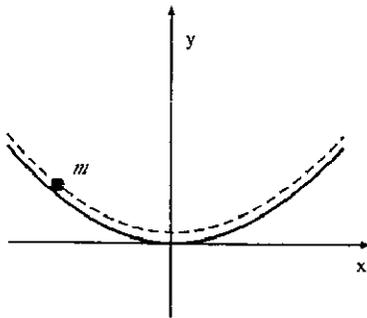
Pela relação (5.23), temos que o período do pêndulo simples independe da amplitude. Entretanto, não podemos esquecer que o resultado acima foi obtido para o caso de pequenas amplitudes. Assim, o mais correto seria dizer que o período do pêndulo simples independe da amplitude para o caso de pequenas amplitudes.

Podemos agora formular a seguinte pergunta: Será que é possível construir um pêndulo onde o período seja totalmente independente da amplitude, isto é, mesmo que esta não seja pequena? A resposta é afirmativa e é este o exemplo que discutiremos a seguir.

5.1.2 Pêndulo cujo período independe da amplitude

Em lugar da massa m presa a um fio, consideremos uma massa movendo-se sobre uma superfície sem atrito, como mostra a Figura 5.6. As forças que atuam sobre a partícula estão especificadas na Figura 5.7.

Figura 5.6: Corpo de massa m em movimento oscilatório apoiado numa superfície.



A componente da resultante ao longo da trajetória é dada por

$$F_T = mg \cos \theta. \quad (5.24)$$

Mas, convenientemente, podemos escrever $\cos \theta$ como dy/ds , onde ds é um elemento infinitesimal tomado ao longo da trajetória (veja Figura 5.8). Então,

$$F_T = mg \frac{dy}{ds}. \quad (5.25)$$

O movimento será harmônico simples, para qualquer amplitude, se

$$F_T = ks, \quad (5.26)$$

onde s é medido ao longo da trajetória, a partir da origem. Juntando (5.25) e (5.26), obtemos

$$mg \frac{dy}{ds} = ks. \quad (5.27)$$

Figura 5.7: Forças que atuam sobre a partícula.

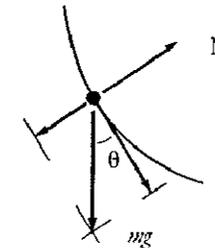
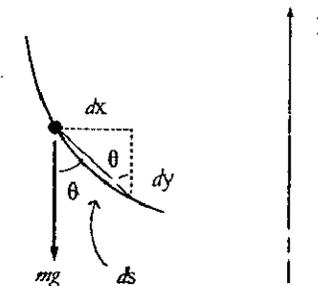


Figura 5.8: Relação entre $\cos \theta$, dy e ds .



A solução de (5.27) é diretamente obtida

$$mgy = \frac{1}{2} ks^2 + \text{constante}. \quad (5.28)$$

Pela origem que escolhemos na Figura 5.6, temos que em $y = 0$, $s = 0$. Assim, a constante que aparece na relação (5.28) é zero. Logo,

$$s = \sqrt{\frac{mgy}{k}}. \quad (5.29)$$

Vamos ver que curva é esta. Pelos dados da Figura 5.8, temos

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.29) e (5.30) em (5.27), encontramos a seguinte equação diferencial

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{g}{2\omega^2 y}, \quad (5.31)$$

onde $\omega^2 = k/m$. A solução da equação acima fica resumida a uma questão de integração pois

$$dx = \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y} - 1} dy. \quad (5.32)$$

Para fazê-la, o problema imediato é conseguir uma substituição tal que elimine a raiz quadrada. Seja então

$$y = \frac{g}{4\omega^2} (1 - \cos \phi). \quad (5.33)$$

Com isto, podemos mostrar que

$$dx = \frac{g}{4\omega^2} (1 + \cos \phi) d\phi, \quad (5.34)$$

cuja integração fornece

$$x = \frac{g}{4\omega^2} (\phi + \text{sen } \phi) + \text{const}. \quad (5.35)$$

De (5.33), temos que para $y = 0$, $\phi = 0$ (2π , 4π etc.). Mas, quando $y = 0$, $x = 0$ também. Logo, é fácil concluir que a constante que aparece em (5.35) deve ser zero. As equações paramétricas da curva são

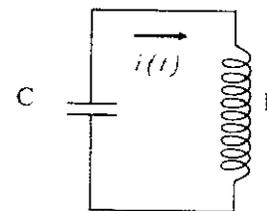
$$\begin{aligned} x &= \frac{g}{4\omega^2} (\phi + \text{sen } \phi), \\ y &= \frac{g}{4\omega^2} (1 - \cos \phi), \end{aligned} \quad (5.36)$$

que correspondem à *ciclóide*. Assim, o pêndulo onde a massa oscila sobre uma ciclóide, independe da amplitude (qualquer que seja o tamanho desta amplitude).

5.1.3 Circuito elétrico análogo

Seja um capacitor C que possui uma certa carga armazenada q_0 . Liguemos este capacitor a uma bobina de indutância L como mostra a Figura 5.9.

Figura 5.9: Circuito LC.



Logicamente, o capacitor irá se descarregar através do curto-circuito inicial formado pela bobina (estamos desprezando a resistência do fio da bobina). Seja $q(t)$ a carga do capacitor no instante t e $i(t)$ a corrente no circuito no mesmo instante. Como q/C é a diferença de potencial entre as placas do capacitor e $L di/dt$ é a diferença de potencial entre os extremos da bobina, temos

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (5.37)$$

Sendo $i = dq/dt$, podemos escrever

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (5.38)$$

Como vemos, esta é uma equação diferencial do tipo do oscilador harmônico simples (Lembra do que falei no início deste capítulo?). Portanto, a solução é

$$q(t) = q_0 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.39)$$

onde

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.40)$$

é a frequência angular de vibração e $\pi/2$ é uma fase tal que para $t = 0$, $q = q_0$.

No instante $t = \pi\sqrt{LC}/2$ (um quarto do período) o capacitor se descarrega totalmente. Depois de mais um intervalo de $\pi\sqrt{LC}/2$, o capacitor volta a se carregar, porém com polarização contrária à inicial, e assim por diante. Em termos de energia, este carregamento e descarregamento do capacitor indica que a energia do sistema ora fica armazenada no capacitor ora no indutor. Em outras palavras, ora fica armazenada no campo elétrico ora no campo magnético.

É interessante também notar a seguinte correspondência entre este circuito e os sistemas mecânicos anteriormente descritos

$$\begin{aligned} q &\longleftrightarrow x, \\ L &\longleftrightarrow m, \\ \frac{1}{C} &\longleftrightarrow k. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A diferença prática entre os dois casos é que o sistema mecânico não pode ter frequências muito altas. Agora não é difícil compreender a origem dos sistemas mecânicos descritos em telas de computador.

5.2 Quando também atua o atrito viscoso

Seja agora o caso onde além da força restauradora $-kx\hat{i}$, mencionada na seção anterior, existe também uma força de atrito viscoso devido à interação com o meio onde a partícula oscila. Esta força já nos foi apresentada na Seção 4.3. Num primeira aproximação ela é dada por

$$\vec{f} = -b\vec{v}, \quad (5.42)$$

onde b é uma constante positiva que depende da forma geométrica do corpo e do meio onde ele se encontra.

Consideremos o movimento numa dimensão. A aplicação da segunda lei de Newton (como sempre) fornece-nos

$$-kx\hat{i} - b\vec{v} = m\vec{a}, \quad (5.43)$$

o que nos leva à seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (5.44)$$

A exemplo da equação (5.4), esta é também uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Como vimos, a solução é do tipo $e^{\lambda t}$. Substituindo esta quantidade em (5.44), a fim de sabermos que condições o parâmetro λ deve satisfazer, encontramos

$$\left(\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} \right) e^{\lambda t} = 0. \quad (5.45)$$

Para a relação acima seja verificada para qualquer valor de t , deveremos ter

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}. \quad (5.46)$$

A fim de não sobrecarregar a notação algébrica, é usual introduzir as definições

$$\gamma = \frac{b}{2m} e \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (5.47)$$

onde ω_0 é a frequência angular natural (frequência angular do movimento quando não é considerado o amortecimento - veja seção anterior). Sobre o papel desempenhado por γ , falaremos daqui a pouco. Substituindo (5.47) em (5.46), encontramos

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (5.48)$$

O resultado acima leva-nos a três casos possíveis, dependendo do tipo de raiz:

1º caso: $\gamma^2 < \omega_0^2$ (raízes imaginárias)

Escrevendo a relação (5.48), neste caso, como

$$\lambda = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (5.49)$$

a solução de (5.44) fica dada por

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(c_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + c_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right). \quad (5.50)$$

Desdobrando os termos entre parenteses e fazendo substituições análogas ao caso do oscilador harmônico simples, vem

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \operatorname{sen} \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \alpha \right). \quad (5.51)$$

Então, a resolução da equação diferencial obtida a partir da segunda lei de Newton nos diz que no caso onde $\gamma^2 < \omega_0^2$, o movimento é oscilatório e com frequência angular dada por $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, porém amortecido. O parâmetro γ é que caracteriza este amortecimento, ele é chamado de *coeficiente de amortecimento*. O gráfico da Figura 5.10, dá-nos uma visão clara do problema (este tipo de movimento é conhecido como *movimento subamortecido*).

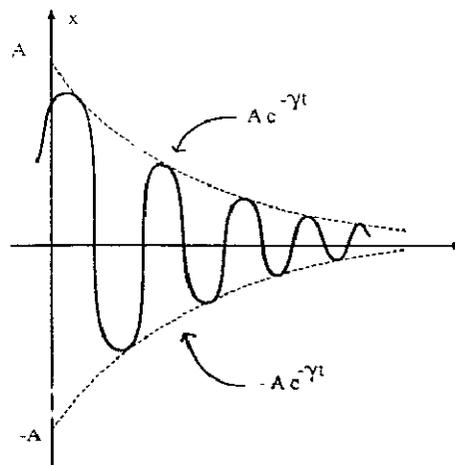
2.º caso: $\gamma^2 > \omega_0^2$ (raízes reais)

A solução neste caso fica

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right). \quad (5.52)$$

O movimento é amortecido sem ser oscilatório. Ele é chamado de *movimento superamortecido*.

Figura 5.10: Oscilações com amortecimento.



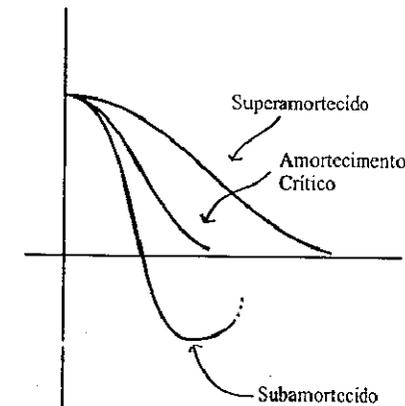
3.º caso: $\gamma^2 = \omega_0^2$ (raízes iguais)

Neste caso, o método que estudamos fornece apenas uma das soluções ($e^{-\gamma t}$). A outra solução é dada por $t e^{-\gamma t}$. A solução completa é portanto²

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}. \quad (5.53)$$

Ela corresponde a um limite entre os dois casos anteriores. É um valor crítico para os dois movimentos. Daí este caso ser conhecido como *amortecimento crítico*. A Figura 5.11 mostra-nos comparativamente estes três casos (em $t = 0$, $x = x_0$ e $v = 0$)

Figura 5.11: Gráfico comparativo dos movimentos.



5.2.1 Circuito elétrico análogo

Também aqui, podemos construir um circuito elétrico que possui analogia com o sistema estudado. Para tal, basta levar em conta a resistência ôhmica do fio da bobina, ou uma outra resistência qualquer colocada em série com ela. Novamente, tomemos um capacitor carregado e o liguemos como mostra a Figura 5.12. Como Ri é a diferença de potencial entre os extremos do resistor

²verifique você mesmo que, no caso de duas raízes iguais, $t e^{-\gamma t}$ é também solução da equação diferencial (5.44). Adiantemos que, de uma maneira geral, para uma equação diferencial de ordem n , cuja equação é do tipo (5.5) e que possui m raízes iguais λ , as soluções correspondentes seriam: $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$, ..., $t^{m-1} e^{\lambda t}$.

R , temos, considerando o que já foi dito anteriormente quando analisamos o circuito LC ,

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (5.54)$$

Comparando esta com a equação (5.44), vemos que R faz o papel da constante b . A solução de (5.54) dá também três casos possíveis. Escrevamos apenas o caso correspondente ao movimento subamortecido,

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.55)$$

onde q_0 é a carga inicial do capacitor.

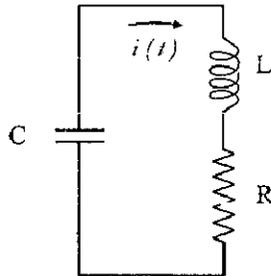
5.3 Oscilações forçadas

Vamos agora tratar de oscilações onde, além das forças anteriormente mencionadas, existe uma força externa do tipo

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\omega_F t) \hat{i}, \quad (5.56)$$

sendo F_0 a amplitude da força e ω_F sua frequência angular de oscilação.

Figura 5.12: Circuito RLC.



Ao incluir mais esta força no oscilador, a segunda lei de Newton fornece

$$-kx - bv + F_0 \sin \omega_F t = ma. \quad (5.57)$$

Usando as definições dadas por (5.47), podemos escrever

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_F t. \quad (5.58)$$

A equação acima é um exemplo de equação linear não-homogênea. A solução geral deve ser do tipo

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (5.59)$$

onde $x_h(t)$ é a solução da equação homogênea correspondente e $x_p(t)$ é chamada de *solução particular*, cuja forma dependerá do tipo de função que faz com que a equação seja não-homogênea.

A soma $x_h + x_p$ significa que o movimento resultante será a superposição de dois movimentos: um devido ao oscilador já considerado anteriormente e outro causado pela força (5.56). Quanto ao primeiro, já analisamos todos os casos possíveis (movimento subamortecido, sobreamortecido e amortecido criticamente). O ponto importante que deve ser notado é que estes movimentos tendem a desaparecer com o tempo, devido ao fator exponencial $e^{-\gamma t}$ [veja relações (5.51) – (5.53)]. No tocante à solução particular, não é difícil concluir que, para a força externa dada por (5.56), esta solução deve ser do tipo

$$x_p(t) = B \sin(\omega_F t + \beta). \quad (5.60)$$

Poderíamos, é claro, tê-la escrito usando a função cosseno em lugar do seno. Temos de determinar B e β , sendo β a diferença de fase entre a força e o deslocamento. Esta diferença de fase não possui o mesmo significado da diferença de fase α vista nos casos anteriores, onde sua origem estava relacionada ao início da contagem do tempo. β depende da natureza do oscilador. Este ponto ficará mais claro com o que desenvolveremos a seguir.

Para determinar B e β , substituamos (5.60) em (5.58) ³. Após algum trabalho algébrico, encontramos

$$\begin{aligned} & \left[(\omega_0^2 - \omega_F^2) B \cos \beta - 2\gamma \omega_F B \sin \beta \right] \sin \omega_F t \\ & + \left[(\omega_0^2 - \omega_F^2) B \sin \beta + 2\gamma \omega_F B \cos \beta \right] \cos \omega_F t \\ & = \frac{F_0}{m} \sin \omega_F t. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Para que esta igualdade se verifique em todos os instantes, deveremos ter

$$(\omega_0^2 - \omega_F^2) B \cos \beta - 2\gamma\omega_F B \sin \beta = \frac{F_0}{m}, \quad (5.62)$$

$$(\omega_0^2 - \omega_F^2) B \sin \beta + 2\gamma\omega_F B \cos \beta = 0. \quad (5.63)$$

De (5.63), imediatamente encontramos

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\gamma\omega_F}{\omega_F^2 - \omega_0^2}. \quad (5.64)$$

A combinação de (5.62) e (5.64) fornece o valor da amplitude B

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_F^2\gamma^2}}. \quad (5.65)$$

Assim, a solução geral da equação diferencial (5.58) é

$$x = x_h + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_F^2\gamma^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_F t + \operatorname{arctg} \frac{2\gamma\omega_F}{\omega_F^2 - \omega_0^2} \right), \quad (5.66)$$

O termo x_h só é significativo para um certo intervalo de tempo inicial, por isso é chamado de *termo transitório*. A solução particular x_p não desaparece com o tempo. Ela é chamada de *termo permanente*. Quando só esta quantidade se torna significativa na solução, diz-se que o sistema entrou no *regime estacionário*³.

Podemos agora introduzir o interessante conceito de *ressonância*. Seja o sistema no regime estacionário. Notamos que a amplitude do movimento depende da frequência da força externa $\vec{F}(t)$. Existe um certo valor de ω_F para o qual a amplitude é máxima. Esta frequência é então chamada de *frequência de ressonância* e a denotaremos por ω_F^R . Observando a relação (5.65), vemos que isto ocorre quando o denominador desta relação for mínimo. Seja então a quantidade

$$D(\omega_F) = (\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega_F^2\gamma^2. \quad (5.67)$$

Para obtermos a condição de mínimo, fazemos

³Observe que x_p deve realmente satisfazer a equação diferencial (5.58) porque x_h é solução da parte homogênea.

$$\begin{aligned} \frac{dD(\omega_F)}{d\omega_F} &= 4(\omega_F^2 - \omega_0^2)\omega_F + 8\gamma^2\omega_F = 0, \\ \Rightarrow \omega_F(\omega_F^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Esta equação fornece-nos dois valores para ω_F

$$\omega_F = 0, \quad (5.69)$$

$$\omega_F = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (5.70)$$

O valor que corresponde a um mínimo de $D(\omega_F)$ é dado por (5.70). Assim, a frequência que procuramos é

$$\omega_F^R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (5.71)$$

Conseqüentemente, a amplitude máxima é dada por

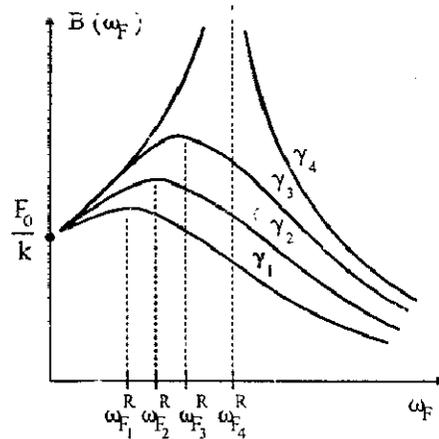
$$B_{\max} = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (5.72)$$

É conveniente ressaltar que $\omega_0^2 \geq 2\gamma^2$, de acordo com a relação (5.70). Notamos ainda que quanto menor for γ , maior será a amplitude na ressonância (entretanto, não é correto fazer $\gamma = 0$ na relação anterior, conforme veremos logo a seguir). A Figura 5.13 mostra esquematicamente um gráfico de $B(\omega_F)$ versus ω_F para alguns valores diferentes de γ .

Falamos acima que na frequência de ressonância não podemos considerar $\gamma = 0$ nos resultados obtidos, mais precisamente na relação (5.72), que dará uma divergência. É claro que esta previsão de uma amplitude infinita quando $\omega_F = \omega_0$ (já tomando $\gamma = 0$) não deve corresponder muito à realidade. Pense bem nisto. Vejamos o que há de errado. Tomemos a relação (5.58) com γ igual a zero.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega_F t. \quad (5.73)$$

O problema é que para $\omega_F = \omega_0$ não podemos considerar a solução particular (5.60) com ω_F substituído por ω_0 , pois esta solução será uma combinação linear de $\operatorname{sen} \omega_0 t$ e $\operatorname{cos} \omega_0 t$. Como sabemos, uma solução desse tipo já é solução da homogênea correspondente. A solução particular, pelo que já vimos no caso de termos duas soluções iguais, deve ser então

Figura 5.13: Gráficos de $B(\omega_F)$ versus ω_F .

$$x_p(t) = Bt \operatorname{sen}(\omega_0 t + \beta). \quad (5.74)$$

Substituindo-a em (5.73), encontramos

$$2B\omega_0 \cos(\omega_0 t + \beta) = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega_0 t. \quad (5.75)$$

Temos que $\beta = 3\pi/2$ (ou $-\pi/2$) e $B = F_0/2m\omega_0$. A solução particular de (5.73) é então dada por

$$x_p = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.76)$$

Conseqüentemente, a solução geral é

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen}\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.77)$$

Como podemos observar, a solução particular possui uma amplitude que cresce linearmente com o tempo. Isto é bem mais razoável do que a (errônea) previsão anterior, onde a amplitude tornava-se infinita instantaneamente. O gráfico de $x_p(t)$ versus t está mostrado na Figura 5.14.

Um outro fenômeno interessante que podemos também discutir é o *batimento*. No caso em que $\gamma = 0$ e ω_F diferir de ω_0 por uma quantidade muito pequena, digamos

$$\omega_F = \omega_0 + \epsilon, \quad (5.78)$$

temos o chamado fenômeno de batimento. Vejamos o que vem a ser isto. Para as condições acima, a solução geral é do tipo

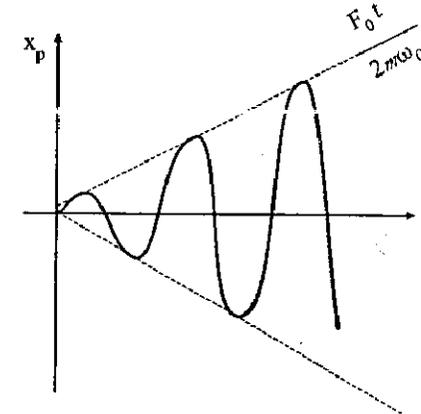
$$x = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha) + B \operatorname{sen}[(\omega_0 + \epsilon)t], \quad (5.79)$$

onde

$$B = \frac{F_0}{2m\omega_0\epsilon} \quad \text{e} \quad \beta = 0, \quad (5.80)$$

que são obtidos de (5.64) e (5.65). (Por que agora podemos fazer $\gamma = 0$ nessas relações?) Desenvolvendo (5.79), vem

$$x = [A \cos \alpha + B \cos(\epsilon t)] \operatorname{sen}(\omega_0 t) + [A \operatorname{sen} \alpha + B \operatorname{sen}(\epsilon t)] \cos(\omega_0 t). \quad (5.81)$$

Figura 5.14: Gráfico de $x_p(t)$ versus t .

Fazendo

$$\begin{aligned} A \cos \alpha + B \cos(\epsilon t) &= C \cos \delta, \\ A \operatorname{sen} \alpha + B \operatorname{sen}(\epsilon t) &= C \operatorname{sen} \delta, \end{aligned} \quad (5.82)$$

encontramos

$$x(t) = C \operatorname{sen}(\omega_0 t + \delta) \quad (5.83)$$

Pelas condições dadas por (5.82), vemos que tanto C como δ dependem do tempo. Vejamos o que isto acarreta. A partir de (5.82), podemos expandir C e δ em termos das demais quantidades.

$$\delta = \operatorname{arc\,tg} \frac{A \operatorname{sen} \alpha + B \operatorname{sen}(\epsilon t)}{A \cos \alpha + B \cos(\epsilon t)}, \quad (5.84)$$

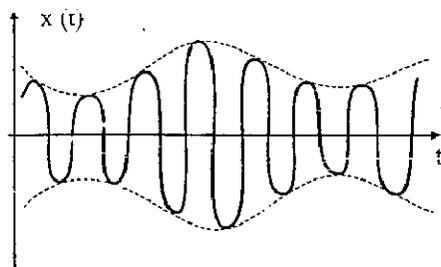
$$\begin{aligned} C^2 &= [A \operatorname{sen} \alpha + B \operatorname{sen}(\epsilon t)]^2 + [A \cos \alpha + B \cos(\epsilon t)]^2 \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\epsilon t - \alpha). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Como vemos,

$$A + B \geq C \geq |A - B|. \quad (5.86)$$

Tudo o que fizemos até agora vale para qualquer valor de ϵ . Tomando ϵ muito pequeno, temos o gráfico mostrado na Figura 5.15, que caracteriza o fenômeno do batimento.

Figura 5.15: Batimento.



A curva interna da Figura 5.15 possui frequência angular ω_0 e a modulante, frequência angular ϵ .

Em virtude de C e δ serem funções do tempo, tanto a curva modulante como a modulada não são estacionárias. Figuras como estas são facilmente vistas num osciloscópio, através da analogia entre sistemas mecânicos e circuitos elétricos.

5.3.1 Circuito elétrico análogo

O análogo elétrico do oscilador forçado corresponde a um circuito RLC série, alimentado por uma fonte, como mostra a Figura 5.16 (para obtermos o caso sem amortecimento, fazemos $R = 0$). Considerando que a tensão $V(t)$, fornecida pela fonte, seja dada por

$$V(t) = V_0 \operatorname{sen} \omega_F t, \quad (5.87)$$

temos,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{V_0}{L} \operatorname{sen} \omega_F t. \quad (5.88)$$

Esta equação diferencial é semelhante à equação (5.58). Sua solução possui um termo transitório que desaparece com o tempo (solução da homogênea). O termo permanente (solução particular) é dado por

$$q(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\omega_F^2 L - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2 \omega_F^2}} \operatorname{sen}(\omega_F t + \beta), \quad (5.89)$$

onde

$$\beta = \operatorname{arc\,sen} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_F L - \frac{1}{\omega_F C}\right)^2}}. \quad (5.90)$$

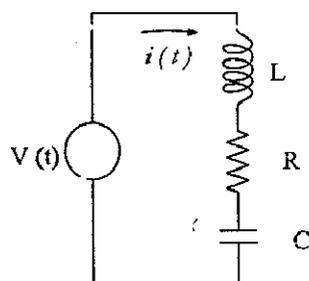
A corrente é diretamente obtida

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_F L - \frac{1}{\omega_F C}\right)^2}} \cos(\omega_F t + \beta), \quad (5.91)$$

Vamos aproveitar estes resultados para fazer algumas observações:

(i) A tensão aplicada e a corrente do circuito não estão em fase. Existe a defasagem $\beta - \frac{\pi}{2}$. Isto não aconteceria num circuito puramente resistivo (observe que em (5.90) temos $\beta = \pi/2$ para um circuito só com R e, conseqüentemente, a defasagem seria zero). São as presenças do capacitor e da indutância que causam esta defasagem.

(ii) A amplitude da corrente não depende diretamente do termo V_0/R , como no circuito puramente resistivo. Em lugar de R aparece um termo dado por

Figura 5.16: Circuito RLC série alimentado por uma fonte de corrente alternada.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_F L - \frac{1}{\omega_F C}\right)^2}. \quad (5.92)$$

Esta quantidade é chamada de *impedância* do circuito. O importante é notar que ela depende da frequência. Para

$$\omega_F^2 = \frac{1}{LC}, \quad (5.93)$$

temos Z mínimo. Esta é a frequência de ressonância, quando o circuito se comporta como se fosse puramente resistivo. A impedância exercida pela bobina, na ressonância, é cancelada pela impedância exercida pelo capacitor. A sintonia de estações de rádio, por exemplo, nada mais é do que a colocação do circuito de entrada do rádio em ressonância com a frequência da estação que estamos querendo sintonizar. Isto é feito pela variação da capacitância de um capacitor chamado *capacitor variável*.

► Exercícios

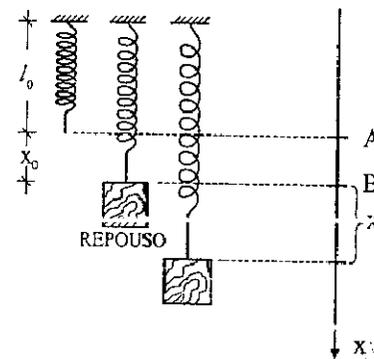
5.1. Calcule a velocidade e aceleração de uma partícula descrevendo um movimento harmônico simples. Em que pontos ela pára? Onde a velocidade é máxima? No texto, escrevemos a expressão do oscilador harmônico através da função seno, mostre que poderíamos tê-lo feito através da função cosseno, bastando redefinir o valor da fase inicial α .

5.2. Ao discutirmos o oscilador harmônico simples através de uma massa m presa a uma mola, consideramos a mola na posição horizontal. Poderíamos, entretanto, ter feito o mesmo estudo considerando o sistema na posição vertical,

sem ter de aparecer o peso, explicitamente, quando da utilização da segunda lei de Newton. Isto é esclarecido na Figura 5.17, onde l_0 é o comprimento inicial da mola (isto é, quando não está esticada ou comprimida) e x_0 corresponde à elongação da mola tal que kx_0 equilibra a força peso. Portanto, na posição B , a força resultante que atua sobre o corpo é nula. Se considerarmos a origem neste ponto, qualquer deslocamento a partir daí fará com que haja uma força resultante sobre o corpo dada por $-kx$. Assim, a aplicação da segunda lei de Newton, com estas condições, dará a mesma equação (5.3) e, conseqüentemente, as mesmas conclusões obtidas naquela oportunidade.

Vamos agora supor que você não esteja satisfeito com a explicação acima e deseja tomar a origem do movimento no ponto A . Neste caso, o peso deve ser incluído. Faça isto, chamando de x' o deslocamento a partir do ponto A . No final, faça uma mudança de variável substituindo x' por $x + x_0$, onde $x_0 = mg/k$. Verifique então se não é obtido o mesmo resultado anterior.

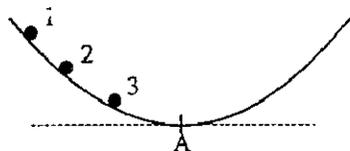
Figura 5.17: Exercício 2.



5.3. Considere uma superfície cuja seção é uma cicloide e três partículas de mesma massa, que podem deslizar sobre ela sem atrito (veja Figura 5.18). Elas são soltas nas posições mostradas na figura, no mesmo instante. Explique por que elas chegam juntas no ponto A .

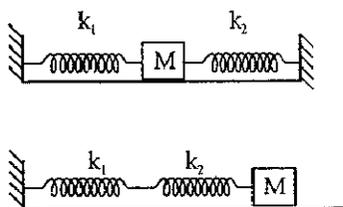
5.4*. Um bloco de madeira com densidade ρ possui dimensões a , b e c . Ele está flutuando num líquido de densidade μ , onde $\mu > \rho$, com o lado a disposto verticalmente. Num determinado instante, ele é empurrado para baixo e solto. Mostre que o movimento será harmônico simples. Calcule o período de oscilação.

Figura 5.18: Exercício 3.



5.5*. As constantes elásticas das molas na Figura 5.19 são k_1 e k_2 . Calcule a constante k de uma mola equivalente para cada caso.

Figura 5.19: Exercício 5.



5.6. Mostre que a relação (5.52) pode ser escrita como

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \operatorname{sh}(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \alpha)$$

onde $c_1 - c_2 = A \operatorname{ch} \alpha$ e $c_1 + c_2 = A \operatorname{sh} \alpha$. As funções $\operatorname{sh} \alpha$ e $\operatorname{ch} \alpha$ são os seno e cosseno hiperbólicos, respectivamente. Elas são definidas por $\operatorname{sh} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$ e $\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$. Verifique também que $\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \alpha$.

5.7*. Seja um oscilador harmônico forçado para o caso particular de o atrito viscoso ser desprezado. A equação diferencial característica do sistema, decorrente da utilização da segunda lei de Newton, é $\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m$, onde $F(t)$ é a força externa aplicada e $\dot{x} = dx/dt$.

a) Mostre que esta equação pode ser escrita como $\dot{z} - i\omega_0 z = F(t)/m$, onde z é uma quantidade complexa dada por $z = \dot{x} + i\omega_0 x$.

b) A solução da parte homogênea desta nova equação é diretamente dada por $A e^{i\omega_0 t}$. Consideremos que o efeito do termo que quebra a homogeneidade da equação seja uma amplitude dependente do tempo, isto é, $z(t) = A(t) e^{i\omega_0 t}$. Mostre, então, que a solução da equação é

$$z(t) = e^{i\omega_0 t} \left(\frac{1}{m} \int_0^t d\tau F(\tau) e^{-i\omega_0 \tau} + z_0 \right)$$

onde z_0 é $z(t)$ para $t = 0$. Conhecendo $z(t)$, obtém-se a solução $x(t)$ fazendo $x(t) = \operatorname{Im} z / \omega_0$.

Esta é uma outra maneira de resolver uma equação diferencial do tipo mostrado no início. É importante destacar que o $x(t)$ obtido já é a própria solução geral.

c) Use a relação acima deduzida para resolver a equação (5.73), considerando $\omega_F = \omega_0$ (ressonância). A solução não será exatamente (5.77) porque as constantes lá e aqui utilizadas são diferentes. Mostre a equivalência das duas soluções.

d) Resolva os seguintes casos, usando os dois processos, para a força externa $F(t)$ dada por F_0 (constante), $F_0 t$ e $F_0 e^{-\alpha t}$.

(Em todos os casos considere as condições de contorno: $t = 0, x = 0$ e $\dot{x} = 0$.)

CAPÍTULO 6

Movimento de uma partícula num campo eletromagnético

Seja uma partícula de carga q e massa m movendo-se numa região onde existe um campo eletromagnético caracterizado pelos vetores \vec{E} e \vec{B} . Sobre a partícula atuará uma força dada por (veja Capítulo 2)

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.1)$$

Esta é a chamada *força de Lorentz* e está escrita no sistema internacional de unidades. Com o uso da segunda lei de Newton, obtemos a seguinte equação diferencial

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + q \vec{B} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - q \vec{E} = 0, \quad (6.2)$$

que não é muito simples de ser resolvida, visto que os campos \vec{E} e \vec{B} são, num caso geral, funções arbitrárias do espaço e do tempo.

Nós vamos aqui resolver a Eq. (6.2) para uma situação muito particular, porém interessante. Consideremos \vec{E} e \vec{B} constantes (não dependem do tempo), uniformes (não dependem da posição) e possuindo as seguintes orientações

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_y \hat{j} + E_z \hat{k}, \\ \vec{B} &= B \hat{k}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Introduzindo esses dados em (6.2), obtemos

$$\ddot{x} = \frac{qD}{m} \dot{y}, \quad (6.4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} + \frac{q}{m} E_y, \quad (6.5)$$

$$\ddot{z} = \frac{qE_z}{m}, \quad (6.6)$$

onde os pontos sobre as variáveis representam derivadas em relação ao tempo. Começemos com a Eq. (6.6), cuja solução é diretamente dada por

$$z(t) = z_c + v_{oz}t + \frac{qE_z}{2m} t^2, \quad (6.7)$$

ou seja, a projeção do movimento ao longo do eixo z é uniformemente acelerado.

Quanto à solução das equações (6.4) and (6.5), poderíamos fazer o seguinte: derivando cada uma em relação ao tempo e fazendo as devidas substituições, obteríamos

$$\ddot{x} + \frac{q^2 B^2}{m^2} \dot{x} = \frac{q^2 B E_y}{m^2}. \quad (6.8)$$

Embora seja uma equação diferencial linear (não homogênea) de terceira ordem na variável x , poderíamos considerá-la como de segunda ordem na variável \dot{x} , cuja solução é algo até simples. Deixaremos a resolução da Eq. (6.8) como um exercício.

Vamos aqui seguir um outro caminho, onde não será preciso derivar em relação ao tempo as equações (6.4) e (6.5). Multiplicando (6.5) por $i = \sqrt{-1}$ e somando-a com a Eq. (6.4), obtemos

$$\ddot{x} + i \dot{y} + i \frac{qB}{m} (\dot{x} + i \dot{y}) = i \frac{qE_y}{m}. \quad (6.9)$$

Introduzindo a variável complexa

$$\xi = x + iy, \quad (6.10)$$

podemos escrever a relação anterior simplesmente como

$$\ddot{\xi} + i \frac{qB}{m} \dot{\xi} = i \frac{qE_y}{m}, \quad (6.11)$$

que é uma equação diferencial linear (com coeficientes constantes) e não-homogênea. Como já vimos na Seção 5.3, a solução é do tipo

$$\xi(t) = \xi_h(t) + \xi_p(t), \quad (6.12)$$

onde $\xi_h(t)$ é a solução geral da homogênea e $\xi_p(t)$ é a solução particular. Para a solução da homogênea, consideramos que ela seja do tipo $e^{\lambda t}$. Assim,

$$\lambda^2 + \frac{iqB}{m} \lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \text{ e} \\ \lambda = -\frac{iqB}{m} \end{cases} \quad (6.13)$$

Portanto, a solução da equação homogênea é

$$\xi_h(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{iqB}{m} t}, \quad (6.14)$$

onde c_1 e c_2 são quantidades complexas.

Pelo tipo de termo que quebra a homogeneidade da equação, temos que a solução particular é dada por at , onde a é uma constante a ser determinada. Substituindo esta solução na equação (6.11), temos que a deve valer E_y/B . Portanto,

$$\xi_p = \frac{E_y}{B} t, \quad (6.15)$$

Combinando (6.12), (6.14) e (6.15), temos que a solução geral de (6.11) é dada por

$$\xi(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{iqB}{m} t} + \frac{E_y}{B} t. \quad (6.16)$$

Escrevendo convenientemente as constantes complexas c_1 e c_2 como

$$c_1 = c_x + ic_y \quad \text{e} \quad c_2 = A e^{-i\phi}, \quad (6.17)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \xi(t) = c_x + ic_y + A \cos\left(\frac{qB}{m} t + \phi\right) \\ - i A \sin\left(\frac{qB}{m} t + \phi\right) + \frac{E_y}{B} t. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Identificando as partes real e imaginária de ambos os lados da equação acima, encontramos

$$\begin{aligned} x(t) = c_x + A \cos(\omega t + \phi) + \frac{E_y}{B} t, \\ y(t) = c_y - A \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde a frequência angular ω é dada por

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (6.20)$$

Se E_y fosse zero, a projeção do movimento no plano xy seria um círculo de raio A e centro em (c_x, c_y) . Mas, devido ao termo $E_y t/B$, a projeção do movimento é uma cicloide, cuja forma dependerá da grandeza de E_y/B . A Figura 6.1 mostra três situações possíveis.

Vamos concluir este capítulo discutindo um exemplo relativístico que servirá para tirar uma dúvida que o estudante geralmente tem quando ainda não está muito familiarizado com a teoria da relatividade¹.

Na teoria da relatividade existe um limite para as velocidades, que é a velocidade da luz. Raciocinando só em termos da Mecânica Newtoniana, o seguinte argumento é geralmente apresentado. Considere que uma força (mesmo constante) esteja atuando sobre uma partícula. Como o movimento será sempre acelerado (lembre-se de que estamos raciocinando só em termos da Mecânica Newtoniana) a velocidade crescerá indefinidamente.

Vamos explicar isto, colocando o seguinte problema. Seja uma partícula de carga q e massa m sujeita a um campo elétrico constante dirigido ao longo do eixo x . Tomemos $\vec{E} = E\hat{i}$. Deixe-me adiantar que não há nenhum fator que leve a uma correção relativística para a carga elétrica e que a hipótese de o campo elétrico ser constante ao longo do eixo x , sobre o qual consideraremos o movimento, é também perfeitamente consistente. Vamos continuar usando a segunda lei de Newton neste problema, onde consideraremos as condições de contorno: $t = 0$, $x = 0$ e $v = 0$. Só há um ponto que deve ser corrigido em relação ao que vocês sabem da Mecânica Newtoniana (que é onde está o cerne do problema). A expressão relativística do momento de uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} é dada por

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.21)$$

onde c é a velocidade da luz. Observe que para $v \ll c$ recai-se na expressão usual do momento da Mecânica Newtoniana. É o \vec{p} da relação (6.21) que temos de usar na segunda lei de Newton. Como o movimento se passa apenas ao longo do eixo x , vamos evitar a notação vetorial e escrever simplesmente

¹Estamos nos referindo à relatividade especial, que significa relatividade sem incluir gravitação.

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qE. \quad (6.22)$$

A solução desta equação diferencial é diretamente obtida por

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qEt, \quad (6.23)$$

que após um pequeno trabalho algébrico leva à seguinte expressão para $v(t)$:

$$v(t) = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 + \frac{q^2 E^2 t^2}{c^2}}}. \quad (6.24)$$

Notar que as condições de contorno estão sendo obedecidas. Para t pequeno, tal que $qEt \ll c$, temos $v = \frac{qE}{m}t$, que é a conhecida relação $v = at$ para $a = \text{constante}$. Era esta a relação que estávamos acostumados (realmente, se ela fosse válida sempre não haveria limites para a velocidade). Entretanto, a expressão correta é (6.24). Nela vemos que para $t \rightarrow \infty$ temos $v \rightarrow c$, que é o limite máximo que a velocidade pode atingir. É fácil ver, também, que para $t \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ (veja exercício 2).

Vamos agora calcular a equação do movimento. De (6.24), podemos escrever

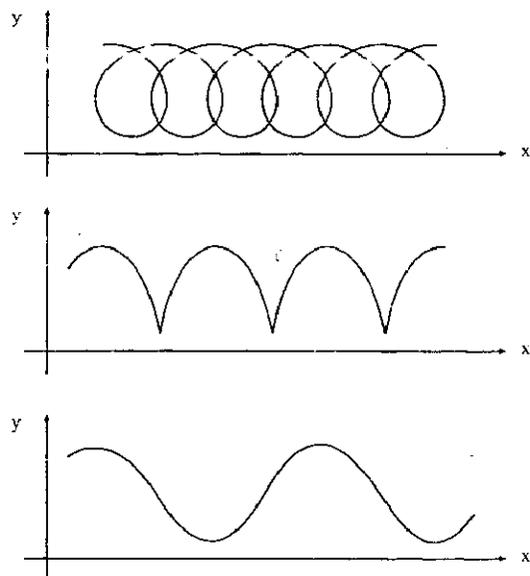
$$dx = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 + \frac{q^2 E^2 t^2}{c^2}}} dt. \quad (6.25)$$

Fica como um exercício fazer a integração acima. O resultado, para as condições iniciais mencionadas, é

$$x(t) = \frac{mc^2}{qE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc}\right)^2} - 1 \right]. \quad (6.26)$$

Verifique também que para $qEt \ll mc$, temos $x = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$, que é um caso da conhecida relação $x = \frac{1}{2} at^2$, para $a = \text{constante}$.

Figura 6.1: Exemplos de trajetórias no plano xy .



► Exercícios

6.1. Obtenha a solução do primeiro exemplo discutido neste capítulo mas partindo da Eq. (6.8).

6.2. A partir da expressão de $v(t)$ dada por (6.24), calcule a expressão para $a(t)$. Verifique, então, que para $t \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$.

6.3. Integre a expressão (6.25) e obtenha $x(t)$ dado por (6.26).

CAPÍTULO 7

Movimento em referencias não-inerciais

Até agora, temos estudado os movimentos considerando sempre um mesmo referencial. A nossa única liberdade tem sido de escolher, dentro deste referencial, o sistema de coordenadas (veja o exemplo discutido na Seção 3.1, especialmente a Figura 3.2). Neste capítulo, vamos extrapolar esta liberdade e passar a escolher também o referencial em que vamos trabalhar, sendo nosso principal objetivo os referenciais não-inerciais. Inicialmente, com o propósito de introduzir alguns conceitos gerais como posição, velocidade e aceleração relativas, consideraremos o caso de dois observadores em movimento e discutiremos como um vê o movimento do outro. Depois, trataremos do movimento de um corpo visto por dois observadores inerciais. Finalmente, consideraremos o caso de movimento sob o ponto de vista de observadores não-inerciais. Para estes, aparecem outras forças atuando sobre o corpo além daquelas existentes para os observadores inerciais. Essas forças tomam o nome de *forças inerciais* ou *forças fictícias*.

7.1 Posição, velocidade e aceleração relativas

Sejam os movimentos de duas partículas A e B , referidas a um certo sistema de eixos x , y e z , como mostra a Figura 7.1. As quantidades que aparecem na figura possuem os seguintes significados, alguns já bem conhecidos pelo que temos discutido até então:

- $\vec{r}_A(t)$ = posição da partícula A no instante t ,
- $\vec{r}_B(t)$ = posição da partícula B no instante t ,
- $\vec{r}_{B,A}(t)$ = vetor posição da partícula B em relação à A no instante t .

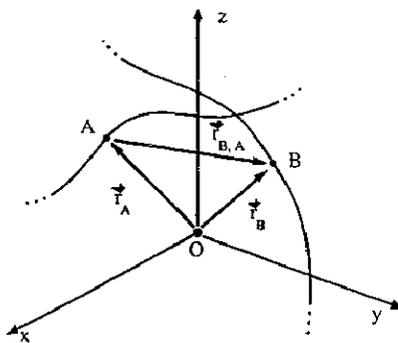
O vetor $\vec{r}_{A,B}(t)$ seria o vetor posição da partícula A em relação à partícula B no mesmo instante t . É fácil ver também que $[\vec{r}_{A,B}(t) = -\vec{r}_{B,A}(t)]$.

As partículas A e B podem ser vistas como dois observadores (não necessariamente inerciais) e as quantidades $\vec{r}_{A,B}$ e $\vec{r}_{B,A}$ correspondem aos vetores posição de um em relação ao outro.

Pelo triângulo OAB , podemos diretamente escrever

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B,A}. \quad (7.1)$$

Figura 7.1: Movimentos de duas partículas referidos a um sistema de eixos ortogonais.



Derivando a expressão (7.1) com respeito ao tempo, vem

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B,A}, \quad (7.2)$$

onde

- $\vec{v}_A(t)$ = velocidade da partícula A no instante t ,
- $\vec{v}_B(t)$ = velocidade da partícula B no instante t ,
- $\vec{v}_{B,A}(t)$ = velocidade da partícula B em relação à partícula A no instante t [$\vec{v}_{A,B}(t) = -\vec{v}_{B,A}(t)$].

Derivando a relação (7.2) também com respeito ao tempo, obtemos a relação entre as acelerações

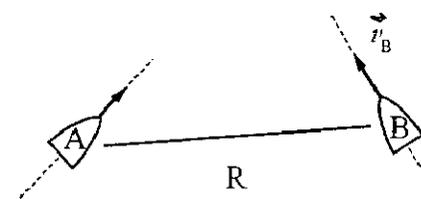
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B,A}, \quad (7.3)$$

cujos significados são semelhantes aos que vimos para posição e velocidade.

A finalidade desta seção é só esta, ou seja, de apresentar os conceitos de posição, velocidade e aceleração relativas. É importante ressaltar que estes conceitos fazem parte do nosso dia-a-dia. É bem provável que vocês, estando parados num carro, ônibus ou metrô, já tenham tido a sensação de estar em movimento ao ver um outro carro deslocando-se em relação a vocês. Isto não é apenas uma sensação, é um fato. O conceito de movimento é relativo. Vamos discutir um exemplo.

Sejam dois navios, A e B , viajando em águas tranqüilas e sem vento. Eles possuem velocidades \vec{v}_A e \vec{v}_B (em relação a um observador em terra), respectivamente, e estão separados por uma distância R , como mostra a Figura 7.2. Todos esses dados são conhecidos pelos comandantes dos dois navios (com utilização do rádio, radar etc.). Vamos explicar, sob o ponto de vista de cada um deles, como eles sabem se haverá ou não colisão.

Figura 7.2: Movimento de dois navios.



A fim de clarificar um pouco mais este exemplo, vamos considerar que, num instante qualquer, a posição e velocidade de cada navio seja $\vec{r}_A = -3\hat{i} \text{ km}$, $\vec{r}_B = -3\hat{j} \text{ km}$, $\vec{v}_A = 2\hat{i} \text{ km/h}$ e $\vec{v}_B = 3\hat{j} \text{ km/h}$.

Para o comandante de um dos navios saber se haverá ou não colisão, ele precisa conhecer a posição e velocidade do outro navio em relação a ele. Para os dados acima, temos, por exemplo, que a posição e velocidade do navio B em relação ao navio A são

$$\begin{aligned} \vec{r}_{B,A} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A = 3\hat{i} - 3\hat{j} \text{ km}, \\ \vec{v}_{B,A} &= \vec{v}_B - \vec{v}_A = -2\hat{i} + 3\hat{j} \text{ km/h}. \end{aligned}$$

De posse destes dados, o comandante do navio A pode afirmar que não haverá colisão. Haveria se $\vec{r}_{B,A}$ e $\vec{v}_{B,A}$ tivessem sentidos opostos. Eles podem também

calcular o instante em que os dois navios estarão mais próximos. Vejamos como se faz isto.

Considerando $t = 0$ o instante em que os dados acima são tomados, temos que num instante posterior qualquer t o vetor posição $\vec{r}_{B,A}(t)$ será dado por

$$\begin{aligned}\vec{r}_{B,A}(t) &= \vec{r}_{B,A}(0) + \vec{v}_{B,A}t = 3\hat{i} - 3\hat{j} + (-2\hat{i} + 3\hat{j})t \\ &= (3 - 2t)\hat{i} - (3 - 3t)\hat{j}.\end{aligned}$$

A distância de maior aproximação corresponderá obviamente ao valor mínimo do módulo de $\vec{r}_{B,A}$, que é dado por

$$R = \sqrt{(3 - 2t)^2 + (3 - 3t)^2} = \sqrt{13t^2 - 30t + 18}.$$

O mínimo de R corresponde ao mínimo de $13t^2 - 30t + 18$. Isto é facilmente calculado fornecendo $t = 1h9min$. A distância de maior aproximação será $830m$.

7.2 Observadores inerciais

Na seção anterior, introduzimos os conceitos de posição, velocidade e aceleração relativas, onde dois observadores analisavam o movimento um do outro de acordo com seus próprios referenciais. Nesta seção, consideremos dois observadores inerciais, que chamaremos de O e O' . Seja x, y, z o sistema de coordenadas onde o observador O faz suas medidas e x', y', z' o sistema de coordenadas para O' . Seja \vec{V} a velocidade com que O' se afasta de O (conseqüentemente, será $-\vec{V}$ a velocidade com que O se afasta de O'). Naturalmente, como os observadores são inerciais, \vec{V} deve ser constante. Consideremos que os dois observadores analisam o movimento de uma certa partícula e tomemos os eixos dos seus sistemas de coordenadas respectivamente paralelos sendo x e x' coincidentes. A Figura 7.3 esclarece o que está sendo dito. $\vec{r}(t)$ é o vetor posição do movimento da partícula para o observador O , no instante t , e $\vec{r}'(t)$ é o vetor posição do movimento da mesma partícula para O' , no mesmo instante. Observe que estamos considerando o tempo como sendo o mesmo para os dois observadores ($t = t'$). Na verdade, no nosso estágio atual de informações, não haveria por que serem diferentes.

Pelo triângulo OPO' , podemos diretamente escrever

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{OO}' \quad (7.4)$$

Considerando que O e O' estejam coincidentes no instante $t = 0$, temos

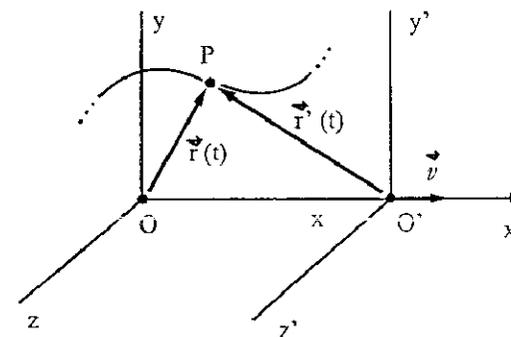
$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{V}t. \quad (7.5)$$

Em termos das componentes, vem

$$\begin{aligned}x &= x' + Vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'.\end{aligned} \quad (7.6)$$

Este conjunto de equações é chamado de *transformadas de Galileo*. Ele representa a passagem de um referencial inercial a outro (para os eixos coordenados na disposição mostrada na Figura 7.3).

Figura 7.3: Observadores inerciais estudam o movimento de uma mesma partícula.



Derivando (7.4) ou (7.5) em relação ao tempo, encontramos

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}. \quad (7.7)$$

Derivando novamente em relação ao tempo, e tendo em conta que \vec{V} é constante obtemos

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t). \quad (7.8)$$

Como vemos, a aceleração da partícula é a mesma para os dois observadores inerciais.

Vamos agora começar a ver o início de algo muito importante em Física. Vocês devem se lembrar de que ao estabelecermos as leis de Newton, consideramos um referencial inercial. Vamos verificar que elas são realmente válidas para todos os referenciais inerciais, isto é, **as leis do movimento são as mesmas para todos os observadores inerciais**.

Quanto à primeira lei, é até redundante tentar verificar se ela é válida ou não para qualquer referencial inercial, pois, como vimos, ela é a própria definição de referencial inercial. Apenas com o intuito de deixar este ponto bem claro, lembremos do que estabelece a primeira lei: uma partícula livre (partícula que não está sujeita a nenhuma interação) ou está em repouso ou movendo-se com velocidade constante. Assim, se um observador inercial O vê uma partícula livre com velocidade constante \vec{v} , um outro observador inercial O' , que se afasta de O com velocidade \vec{V} (constante), verá a mesma partícula com velocidade dada por [veja expressão (7.7)].

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (7.9)$$

que é constante também.

A relação (7.8) nos dá que o lado direito da expressão que representa a segunda lei de Newton é o mesmo para todos os observadores inerciais. Só isto, entretanto, não significa que a segunda lei de Newton seja a mesma para todos os observadores inerciais. Temos de verificar se o lado esquerdo da expressão (que representa a resultante das forças de interação que atuam sobre o corpo) não varia de um observador inercial a outro. Rigorosamente, esta verificação teria de ser feita caso a caso, isto é, partindo da expressão correspondente a cada força que estivesse atuando sobre o corpo. Como, de uma maneira geral, as expressões destas forças são funções da distância entre os corpos que estão interagindo (lembre-se, por exemplo, da força gravitacional) e esta distância é invariante entre os observadores inerciais (para as transformações dadas por (7.6)), temos que as forças de interação também são invariantes entre os observadores inerciais¹.

A terceira lei de Newton, como é fácil concluir, também é a mesma para todos os observadores inerciais.

Vamos discutir o seguinte exemplo. Seja um corpo lançado horizontalmente de uma altura h em relação à superfície da Terra (estamos tomando a

¹ Pode ser que, neste momento, você esteja pensando na força sobre uma carga movendo-se num campo eletromagnético. Ela depende da velocidade e esta, é claro, varia conforme o observador inercial [veja expressão (2.1)]. Este caso pode estar parecendo uma exceção, mas não é. Os campos \vec{E} e \vec{B} também variam com o observador. Adiantemos que a quantidade $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ fica realmente invariante.

Terra como sendo, aproximadamente, um referencial inercial). Consideremos que o movimento deste corpo seja visto por dois observadores: um fixo em relação à Terra, que chamaremos de O , e outro movendo-se com a mesma velocidade horizontal do corpo (observador O'). Sob o ponto de vista do primeiro observador, temos a situação mostrada na Figura 7.4. O observador O vê o corpo e o observador O' com a mesma velocidade horizontal \vec{v} . Já para o observador O' , temos a situação mostrada na Figura 7.5.

Figura 7.4: Ponto de vista do observador O .

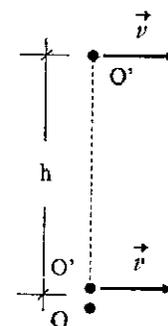
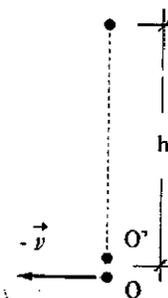


Figura 7.5: Ponto de vista do observador O' .



Como falamos acima, a segunda lei de Newton descreve o movimento do corpo para ambos os observadores. Assim, temos para O e O' , respectivamente (lembre-se de que a força gravitacional não muda para eles)

$$-mg\hat{j} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -g\hat{j}, \quad (7.10)$$

$$-mg\hat{j} = m \frac{d\vec{v}'}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}'}{dt} = -g\hat{j}, \quad (7.11)$$

Resolvendo as equações diferenciais (7.10) e (7.11), encontramos

$$x = vt, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad (7.12)$$

$$x' = 0, \quad y' = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (7.13)$$

Como podemos notar, conhecendo-se a solução de um determinado problema num referencial inercial, podemos usar as transformadas de Galileo [expressões (7.6)] e obter a solução noutro referencial inercial. Para o observador O , a trajetória do corpo é uma parábola. Já para o observador O' é uma linha reta.

A física descrita pelas leis de Newton é a mesma para todos os observadores inerciais. A partir daí, somos tentados a extrapolar esta conclusão para toda a Física, isto é, todas as leis físicas devem ser as mesmas para todos os observadores inerciais. Adiantemos que isto parece ser mesmo verdade e é tido como um dos mais importantes princípios da Física, conhecido como *princípio de Galileo* ou *princípio da relatividade*. Continue prestando atenção para o que se segue.

No século XIX, a teoria eletromagnética adquiriu um grande avanço com as idéias de Maxwell, encerradas principalmente com previsão de ondas eletromagnéticas². Estas ondas foram constatadas experimentalmente por Hertz alguns anos mais tarde. Assim, a teoria eletromagnética, a exemplo da mecânica newtoniana, parecia ser também uma teoria muito poderosa (de fato o é).

Acontecia entretanto o seguinte problema teórico: quando dizemos que as leis de Newton são invariantes para todos os observadores inerciais, isto significa, dentre outras coisas, que se realizarmos uma experiência mecânica num referencial, nenhum resultado poderá priorizar este referencial em relação aos demais. Conforme já vimos, o resultado desta experiência pode ser transportado para outro referencial inercial pelo uso direto das transformadas de Galileo. O problema que mencionamos acima é que isto parecia não ocorrer com o eletromagnetismo. Por exemplo, há experiências realizadas num certo

²Isto foi obtido partindo-se das equações básicas do eletromagnetismo, que são em número de quatro e atualmente conhecidas como equações de Maxwell.

referencial que, após o uso das transformadas de Galileo, os resultados não coincidem com os da mesma experiência realizada neste outro referencial. Isto poderia estar significando que a teoria eletromagnética viola o princípio da relatividade. Este choque de idéias ocorreu no final do século XIX e início do século XX. Alguma coisa parecia estar errada na Física Teórica. Note que este era um problema puramente teórico. Não havia nada experimental que estivesse em desacordo com o eletromagnetismo e mecânica newtoniana, muito pelo contrário.

Este problema foi resolvido por Einstein, em 1905, com a formulação da teoria da relatividade especial. Esta teoria reafirma o princípio de Galileo, isto é, de que as leis físicas devem ser as mesmas para todos os observadores inerciais. Um outro ponto fundamental é que a velocidade da luz deve ser a mesma para todos os observadores inerciais³. Com isto ele obteve um conjunto de transformações para se passar de um referencial inercial a outro. A título de ilustração, vamos escrever estas transformações:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde c é a velocidade da luz. Estas transformações são chamadas de *transformadas de Lorentz*⁴. Note que as transformadas de Galileo são um caso particular das transformadas de Lorentz quando $V \ll c$. Então, o problema que havia na Física não era nem do eletromagnetismo nem do princípio de Galileo, mas sim do conjunto de equações que faziam a passagem de um referencial a outro.

Observe ainda algo bem interessante. O tempo não é mais absoluto para todos os observadores inerciais como era nas transformadas de Galileo. Sobre

³Isto estava de acordo com os resultados da experiência de Michelson e Morley, realizada inicialmente em 1881. Detalhes sobre esta experiência podem ser encontrados em qualquer livro introdutório de relatividade especial.

⁴Elas já eram conhecidas por Lorentz antes da teoria da relatividade. Para ele, eram transformações que levavam à invariância do eletromagnetismo. Entretanto, ele não sabia de onde elas vinham e o que realmente significavam. Faltava justamente a teoria.

a interpretação disto deve-se ser cauteloso. Análises descuidadas e considerações precipitadas (ou intuitivas) podem levar a conclusões absurdas. O que as relações (7.14) significam é que a um ponto do espaço, além das coordenadas x, y, z , deve ser incluída uma outra, o tempo. Um evento, portanto, é algo que acontece num certo ponto do espaço e num certo tempo. Isto é, para o observador O , este evento é caracterizado por (x, y, z, t) e para O' por (x', y', z', t') . Os conjuntos (x, y, z, t) e (x', y', z', t') são ditos pontos do espaço-tempo para os observadores O e O' , respectivamente. O relacionamento entre estas quantidades é dado por (7.14). Simbolizando, em cada ponto do espaço devemos associar um relógio, localizado naquele ponto. Isto é, para o observador O , em cada ponto x, y, z do seu sistema de referência, existe um relógio que mede o tempo no referencial dele. Existem portanto infinitos relógios, todos sincronizados (o sincronismo dos relógios é um ponto importante neste estudo). Para o observador O' , em cada ponto x', y', z' do seu sistema, também existe um relógio. O que acontece é que estes relógios andam de maneira diferente nos dois referenciais.

7.3 Observador não-inercial

Consideremos agora que na situação descrita na Figura 7.3, o observador O' se afaste de O com uma velocidade não constante. Sendo O , por hipótese, um observador inercial, O' não o será. Vejamos, então, o que acontece no referencial deste observador. Seja novamente a Figura 7.3 e tomemos que \vec{V} não seja mais constante. Do triângulo OPC' , escrevemos

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{OO}', \quad (7.15)$$

que é a mesma relação (7.4), só que agora \vec{OO}' não é mais igual a $\vec{V}t$ (considerando O e O' coincidentes em $t = 0$). Derivando a quantidade acima uma e duas vezes com respeito ao tempo, obtemos, respectivamente

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}(t), \quad (7.16)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{\gamma}(t), \quad (7.17)$$

onde $\gamma(t)$ é a aceleração de O em relação a O' no instante t . Reescrevendo a expressão (7.17) como

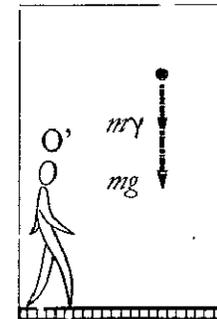
$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{\gamma}(t), \quad (7.18)$$

vemos que a aceleração do corpo para o observador O' (não inercial) é igual à aceleração para o observador O (inercial) menos a aceleração que o observador O' possui em relação ao observador O . Então, no referencial de O' , sobre um corpo de massa m aparece uma força $-m\vec{\gamma}$ além das forças que são vistas pelo observador O . Esta força, por só existir no referencial de O' (não inercial) é chamada de *força fictícia* ou *força inercial*. Ela não está relacionada a nenhuma interação a exemplo das forças que aparecem nos referenciais inerciais. Ela não obedece à terceira lei de Newton, isto é, não existe reação para $-m\vec{\gamma}$. Entretanto, a fim de calcular a trajetória de um corpo num referencial não inercial, temos de estender a segunda lei de Newton de modo a incluir também as forças fictícias.

Vamos mostrar um exemplo. Considere um elevador subindo com aceleração $\vec{\gamma}$ ($\gamma < g$). Uma pessoa dentro do elevador solta um corpo de uma altura h . Vamos ver quanto tempo o corpo leva para atingir o piso. As forças que atuam sobre o corpo, para a pessoa dentro do elevador (observador não inercial) estão especificadas na Figura 7.6. Como podemos notar, tivemos de colocar a força $-m\vec{\gamma}$ (força fictícia) além da força de interação gravitacional. Com o uso da extensão da segunda lei de Newton para o corpo, encontramos

$$-mg\hat{j} - m\gamma\hat{j} = ma'\hat{j}. \quad (7.19)$$

Figura 7.6: Forças que atuam sobre o corpo para o observador no elevador.



Simplificando a massa e trabalhando sem a notação vetorial (o problema é numa dimensão apenas), encontramos

$$a' = -(g + \gamma), \quad (7.20)$$

cuja solução é diretamente obtida

$$y' = h - \frac{1}{2}(g + \gamma)t^2 \quad (7.21)$$

Quando o corpo atinge o piso do elevador, $y' = 0$. Assim, o tempo que o corpo gasta para isto é

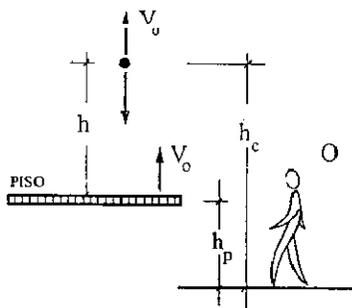
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g + \gamma}} \quad (7.22)$$

A título de ilustração, vamos calcular este mesmo tempo mas considerando agora um observador inercial (que chamaremos de O), situado fora do elevador, vendo-o se mover com aceleração $\bar{\gamma}$. A Figura 7.7 mostra os dados do problema segundo O , onde \vec{V}_0 é a velocidade do corpo (e do elevador) quando ele é solto. Note que apenas a força gravitacional atua sobre o corpo. É fácil concluir que as equações da corpo e do piso são

$$y_c = h_c + V_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (7.23)$$

$$y_p = h_p + V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2. \quad (7.24)$$

Figura 7.7: Dados para o observador O em $t = 0$.



Quando o corpo atinge o piso do elevador, temos obviamente $y_c = y_p$. Assim, combinando as duas equações acima encontramos

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad (7.25)$$

que fornece o mesmo resultado dado por (7.22).

7.4 Observador não-inercial – referencial girante

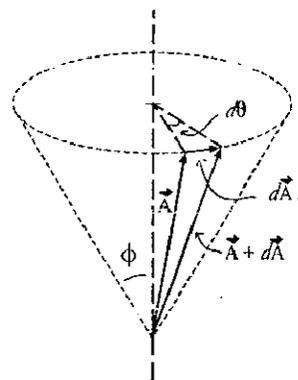
A essência do que vamos discutir aqui já foi apresentada na seção anterior, que é o aparecimento de forças fictícias para o observador não inercial. O fato novo são os tipos de forças fictícias que irão aparecer. Inicialmente, para facilitar os desenvolvimentos algébricos, consideremos um certo vetor \vec{A} de módulo constante, girando em torno de um eixo com velocidade angular ω , como mostra a Figura 7.8. A superfície de revolução descrita é uma superfície cônica onde ϕ é o ângulo da geratriz com o eixo de simetria. De acordo com os dados da figura, podemos escrever⁵

$$|d\vec{A}| = (A \sin \phi) d\theta. \quad (7.26)$$

Dividindo ambos os lados desta relação pelo intervalo de tempo correspondente às variações $d\theta$ e $d\vec{A}$ (note que não estamos derivando a relação acima), temos

$$\frac{|d\vec{A}|}{dt} = A \sin \phi \frac{d\theta}{dt} = \omega A \sin \phi. \quad (7.27)$$

Figura 7.8: Vetor de módulo constante girando em torno de um eixo.



A relação (7.27) corresponde ao módulo de uma expressão vetorial, pois \vec{A} e conseqüentemente $d\vec{A}$ são vetores. Entretanto, não podemos inadvertidamente escrever que $d\vec{A}/dt$ é igual a $\omega \sin \phi \vec{A}$. Um argumento imediato contra isto

⁵ $|\vec{A}| = A$, mas $|d\vec{A}| \neq dA$ pois como $|\vec{A}| = A$ é constante $dA = 0$ (e $|d\vec{A}|$ não é zero).

é que \vec{A} e $d\vec{A}$ possuem direções diferentes. Por outro lado, se considerarmos a velocidade angular como sendo um vetor (veremos mais detalhes sobre isto nos Capítulos 10 e 13), com direção e sentido especificados na Figura 7.9, é fácil ver que (7.27) corresponde ao módulo da seguinte equação vetorial

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \quad (7.28)$$

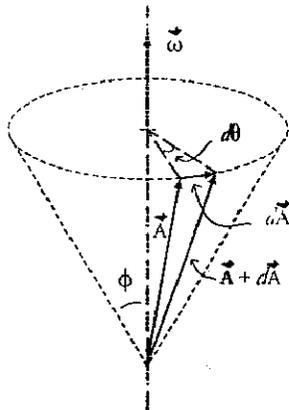
Consideremos agora dois observadores O e O' . Por hipótese, tomemos O como sendo inercial e O' girando com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a O . Consideremos ainda ambos com a mesma origem e analisando o movimento de uma certa partícula (veja Figura 7.10). Os vetores $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}'(t)$ correspondem aos vetores posição da partícula para os observadores O e O' respectivamente. Escrevendo-os em termos de suas componentes, temos

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (7.29)$$

$$\vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'. \quad (7.30)$$

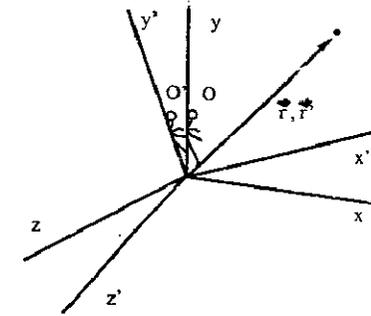
Observe que tivemos de distinguir também os unitários correspondentes dos dois sistemas de eixos porque eles não são iguais, contrariamente ao caso da Figura 7.3, onde os eixos eram paralelos.

Figura 7.9: Vetor velocidade angular.



Como $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)$ (veja Figura 7.10), temos

Figura 7.10: Observadores O e O' analisam o movimento de uma certa partícula.



$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'. \quad (7.31)$$

Derivemos ambos os lados desta relação com respeito ao tempo. Para tal, tomemos o referencial do observador O (por hipótese inercial). Neste caso, os unitários $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ do sistema de coordenadas utilizado pelo observador O' não são constantes. Assim,

$$\vec{v} = \vec{v}' + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt}. \quad (7.32)$$

É fácil ver que os unitários $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ descrevem movimentos em torno do eixo de rotação semelhantes ao do vetor \vec{A} , mostrado nas Figs. VII.8 e VII.9. Assim, pela relação (7.28) podemos escrever

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + x' \vec{\omega} \times \hat{i}' + y' \vec{\omega} \times \hat{j}' + z' \vec{\omega} \times \hat{k}' \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

A última passagem se deve ao fato de $\vec{r} = \vec{r}'$. Derivemos agora (7.33) novamente com respeito ao tempo,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.34)$$

O termo do lado esquerdo da relação (7.34) é a aceleração da partícula para o observador O . Entretanto, não podemos afirmar que $d\vec{v}'/dt$ seja a aceleração

da partícula para O' porque estamos tomando as derivadas sob o ponto de vista do observador O (onde os unitários $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ não são constantes). Temos, então,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} (v'_x \hat{i}' + v'_y \hat{j}' + v'_z \hat{k}') \\ &= \vec{a}' + v'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + v'_y \frac{d\hat{j}'}{dt} + v'_z \frac{d\hat{k}'}{dt} \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Substituindo (7.35) em (7.34), encontramos

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \\ &= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Onde na última passagem usou-se a expressão (7.33). Considerando o mesmo raciocínio desenvolvido na subseção anterior, temos que para o observador O' a aceleração da partícula é (vamos substituir novamente \vec{r} por \vec{r}')

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'. \quad (7.37)$$

Como vemos, para uma partícula de massa m vista do referencial O' (não inercial), podem existir três forças inerciais atuando sobre ela: uma é $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ que é a conhecida *força centrífuga*⁶. A outra força fictícia, $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ é chamada de *força de Coriolis*⁷. Quanto à última, $-m\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$, não chegaremos a usá-la, pois só consideraremos o caso particular com $\vec{\omega}$ constante.

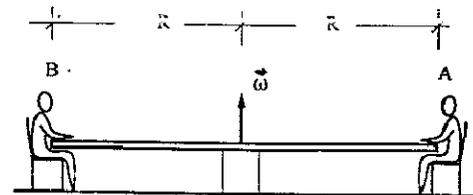
A fim de mostrar como um simples movimento num referencial inercial pode ser complicado sob o ponto de vista de um observador não-inercial, vamos discutir o seguinte exemplo⁸. Sejam duas pessoas, A e B , sentadas próximo à borda de uma mesa circular de raio R . Consideremos o sistema (pessoas + mesa) girando com velocidade angular constante $\vec{\omega}$ em relação a um referencial inercial. Todos estes detalhes estão especificados na Figura 7.11.

⁶No caso particular de movimento circular, a expressão da força centrífuga adquire a forma familiar $-\omega^2 r' \hat{r}'$.

⁷Coriolis foi um engenheiro francês que viveu no início do Século XIX.

⁸J. Barcelos-Neto e M.B. Dias da Silva, *An example of motion in a rotating frame*. Eur. J. Phys. 10 (1989) 305.

Figura 7.11: Observadores girantes A e B .



Num determinado instante ($t = 0$), a pessoa A joga um pequeno disco para B , deslizando sobre a mesa. O objetivo é que ele chegue até B após um intervalo de tempo igual a $2\pi/\omega$ (período). Isto significa que para um observador inercial, que vê A e B rodando, a pessoa B receberá o disco quando passar no mesmo ponto em que estava no instante em que o disco foi arremessado. Consideraremos ainda que não haja atrito entre o disco e a mesa.

Vamos estudar o movimento do disco em relação aos dois referenciais. Para o observador inercial, a resultante das forças que atuam sobre o disco é zero. Portanto, para ele, o movimento é retilíneo e com velocidade constante. Pelas condições de contorno do problema, o disco deve ser arremessado como mostra a Figura 7.12, onde \vec{v}_0' é a velocidade inicial com que a pessoa A arremessa o disco. Temos, então,

$$v'_0 \sin \alpha' = \omega R \quad (7.38)$$

$$v'_0 \cos \alpha' = v_R. \quad (7.39)$$

Para o disco atingir B quando ele passar novamente pela posição mostrada na Figura 7.12, deveremos ter

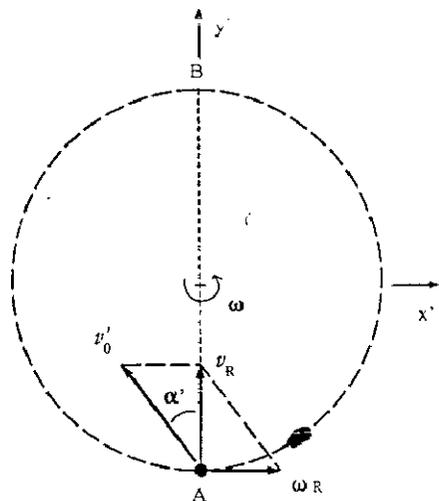
$$2R = v_R \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow v_R = \frac{\omega R}{\pi}, \quad (7.40)$$

onde v_R é o módulo da velocidade resultante. Combinando estas equações, encontramos

$$\tan \alpha' = \pi \Rightarrow \alpha' \simeq 72,3^\circ \quad (7.41)$$

$$v'_0 = \frac{\omega R}{\sin \alpha'} = 1,05 \omega R. \quad (7.42)$$

Figura 7.12: Condições iniciais com que o disco deve ser arremessado.



A título de ilustração, a Figura 7.13 mostra a posição do disco e dos observadores após haver decorrido 1/4 do período.

Vamos passar a discutir o problema imaginando que estamos girando junto com a mesa (referencial de A e B). Agora, a força resultante que atua sobre o disco não é mais zero. Neste referencial girante, temos atuando a força centrífuga e a de Coriolis. A Figura 7.14 mostra estas forças para uma certa posição genérica do disco. A dinâmica do corpo é obtida considerando-se a generalização da segunda lei de Newton pela inclusão das forças fictícias. O resultado é que o corpo possui a seguinte aceleração (veja eq. (7.37))

$$\vec{a}' = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (7.43)$$

Reescrevendo a expressão (7.43) em termos dos unitários \hat{i}' e \hat{j}' encontramos

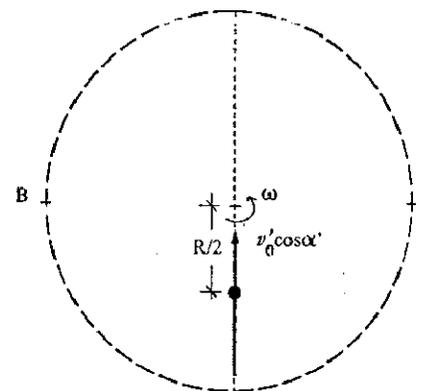
$$\vec{a}' = (\omega^2 x' + 2\omega \dot{y}') \hat{i}' + (\omega^2 y' - 2\omega \dot{x}') \hat{j}'. \quad (7.44)$$

Temos então as seguintes equações diferenciais

$$\ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \quad (7.45)$$

$$\ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}'. \quad (7.46)$$

Figura 7.13: Posição do disco e observadores após 1/4 do período.



Para resolver as equações (7.45) e (7.46), vamos adotar um processo semelhante ao utilizado no primeiro exemplo do capítulo anterior. Multipliquemos então a segunda equação por $i = \sqrt{-1}$ e somemos o resultado à primeira,

$$\begin{aligned} \ddot{x}' + i \ddot{y}' &= \omega^2 (x' + i y') - 2\omega i (\dot{x}' + i \dot{y}') \\ \Rightarrow \ddot{\xi} + 2\omega i \dot{\xi} - \omega^2 \xi &= 0, \end{aligned} \quad (7.47)$$

onde

$$\xi = x' + i y'. \quad (7.48)$$

A equação (7.47) é uma equação diferencial linear e homogênea, cuja solução sabemos ser do tipo $e^{\lambda t}$. Assim, substituindo esta quantidade em (7.47), obtemos

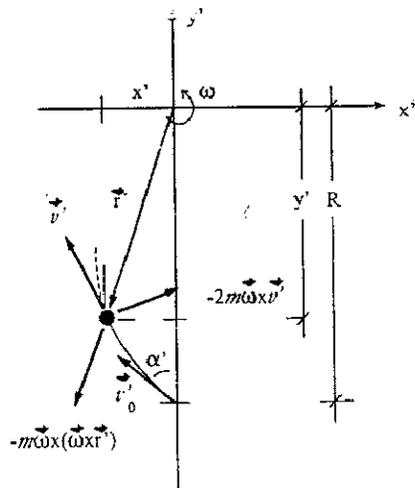
$$\lambda^2 + 2i\omega \lambda - \omega^2 = 0, \quad (7.49)$$

que dá duas raízes iguais a $-i\omega$. Pelo que já vimos na Subseção V.2, uma solução é $e^{-i\omega t}$ e a outra é $t e^{-i\omega t}$. Portanto, a solução geral de (7.47) é

$$\xi(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-i\omega t}, \quad (7.50)$$

onde c_1 e c_2 são constantes complexas genéricas. Vamos interpretar estas constantes em termos das condições iniciais do problema, que são

Figura 7.14: Forças que atuam no disco para os observadores não inerciais.



$$\begin{aligned}x'_0 &= 0, \\y'_0 &= -R, \\x'_0 &= -v'_0 \sin \alpha', \\y'_0 &= v'_0 \cos \alpha'.\end{aligned}\quad (7.51)$$

Inserindo esses valores em (7.50), encontramos

$$\begin{aligned}c_1 &= -iR, \\c_2 &= -v'_0 \sin \alpha' + \omega R + i v'_0 \cos \alpha'.\end{aligned}\quad (7.52)$$

Assim, a solução $\xi(t)$ passa a ser dada por

$$\xi(t) = -iR e^{-i\omega t} - (v'_0 \sin \alpha' - \omega R - i v'_0 \cos \alpha') t e^{-i\omega t}. \quad (7.53)$$

Usando (7.48), obtém-se $x'(t)$ e $y'(t)$

$$x'(t) = (v'_0 t \cos \alpha' - R) \sin \omega t + (\omega R - v'_0 \sin \alpha') t \cos \omega t \quad (7.54)$$

$$y'(t) = (v'_0 t \cos \alpha' - R) \cos \omega t + (v'_0 \sin \alpha' - \omega R) t \sin \omega t. \quad (7.55)$$

As equações (7.54) e (7.55) são as soluções das equações diferenciais (7.45) e (7.46) com as condições iniciais dadas por (7.51). Entretanto, elas ainda não são as equações de movimento do disco do problema proposto no início. Conforme foi dito, estamos querendo que o disco chegue às mãos da pessoa B após o intervalo de tempo $2\pi/\omega$. Há mais duas condições de contorno que devem ser satisfeitas,

$$x'\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0 \quad \text{e} \quad y'\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = R, \quad (7.56)$$

Introduzindo-as nas soluções (7.54) e (7.55), encontramos que a solução do nosso problema é então

$$x'(t) = \left(\frac{\omega t}{\pi} - 1\right) R \sin \omega t, \quad (7.57)$$

$$y'(t) = \left(\frac{\omega t}{\pi} - 1\right) R \cos \omega t. \quad (7.58)$$

A Figura 7.15 corresponde à trajetória do corpo para os observadores não inerciais, onde tomamos $R = 2m$ e $\omega = \frac{\pi}{12} \text{ rad/s}$. É importante que você compare esta trajetória com a do observador inercial. Para ele, a trajetória era um simples movimento retilíneo uniforme. Para as pessoas que estão girando junto com a mesa, a trajetória é bem mais complicada, chegando inclusive a fazer uma volta próximo ao centro da mesa.

Mais interessante ainda é generalizar o exemplo que discutimos. Consideremos que o disco leva um tempo igual a N vezes o período para atingir B , sendo N um número inteiro positivo. A generalização das soluções para este caso não é difícil de ser obtida. Ela é dada por

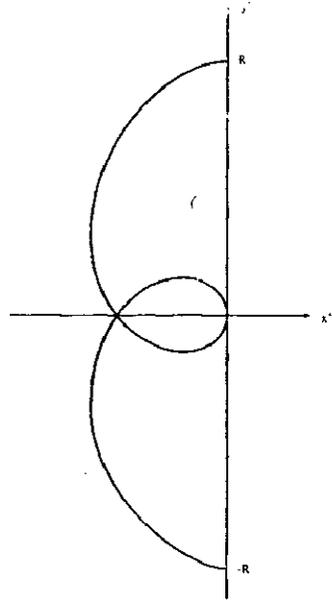
$$x'(t) = \left(\frac{\omega t}{N\pi} - 1\right) R \sin \omega t, \quad (7.59)$$

$$y'(t) = \left(\frac{\omega t}{N\pi} - 1\right) R \cos \omega t. \quad (7.60)$$

As Figuras 7.16 e 7.17 correspondem as trajetórias do disco para os casos de $N = 2$ e $N = 3$, respectivamente.

Um outro exemplo de observadores não-inerciais em referenciais girantes somos nós mesmos, devido ao movimento de rotação da Terra. Pela relação (7.37), temos que o movimento de um corpo de massa m , observado da

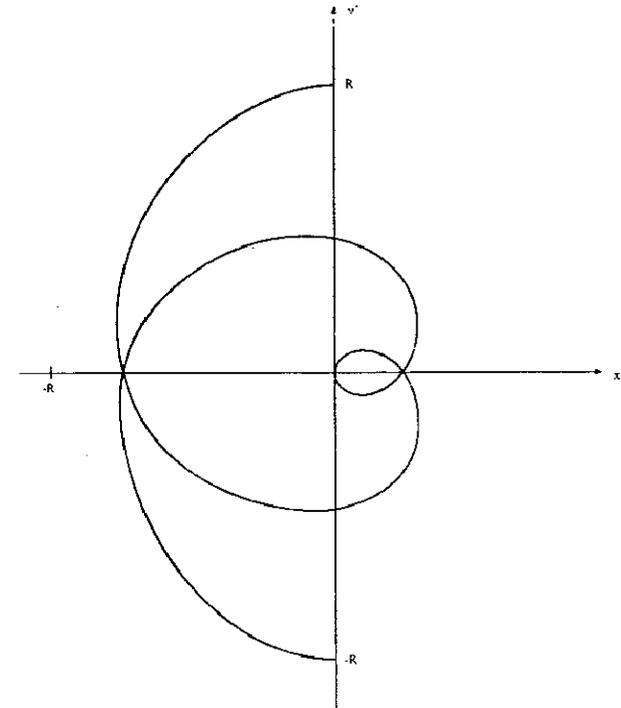
Figura 7.15: Trajetória do disco para as pessoas que giram junto com a mesa.



superfície da Terra, possui, além do peso⁹ mais duas forças inerciais: a força centrífuga, $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, e a de Coriolis, $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$, onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotação da Terra. Em virtude de esta velocidade ser relativamente pequena, os efeitos das forças acima mencionadas são desprezíveis em muitas situações. No caso da força de Coriolis, ela pode se tornar significativa se a velocidade do corpo (medida por um observador na Terra) for relativamente grande, como por exemplo no caso de foguetes. De qualquer maneira, há vários exemplos da presença destas forças para nós, aqui na Terra. Vamos a seguir discutir alguns deles.

Seja inicialmente um corpo em repouso sobre a superfície da Terra. A força de Coriolis é nula. O efeito da força centrífuga provoca, aqui na Terra, a medição de um "campo gravitacional" ligeiramente diferente daquele obtido pela lei da gravitação de Newton. Seja um ponto de latitude λ . A Figura 7.13 mostra a situação descrita. O campo gravitacional aparente medido por um

⁹Não vamos levar em conta a força de atrito com o ar. Não que ela seja sempre desprezível. Em muitos casos, ela pode ser até maior que as forças inerciais presentes. O fato de não considerá-la é apenas para facilitar a análise do que estamos querendo apresentar.

Figura 7.16: Trajetória do disco no referencial não-inercial para $N = 2$.

observador na Terra é

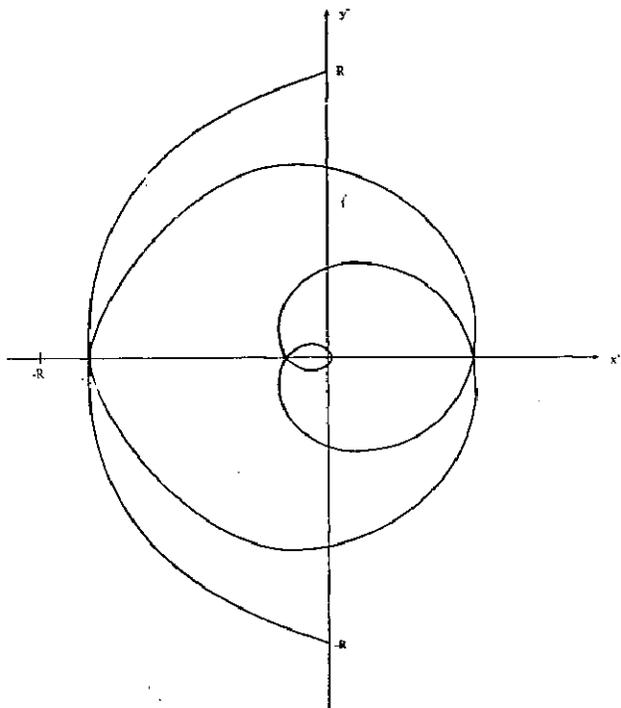
$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \quad (7.61)$$

Uma consequência imediata disto é que, como a superfície líquida da Terra tende a ficar perpendicular a \vec{g}' (e não a \vec{g}), a Terra adquire a forma de um elipsóide de revolução. O módulo de \vec{g}' é dado por (veja Figura 7.18)

$$g' = \left[g^2 + |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')|^2 + 2g |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| \cos(180^\circ - \lambda) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.62)$$

Considerando $R = 6,378 \text{ km}$ o raio médio da Terra, encontramos

$$\begin{aligned} |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')| &= \omega^2 R \cos \lambda \\ &= 3.373 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (7.63)$$

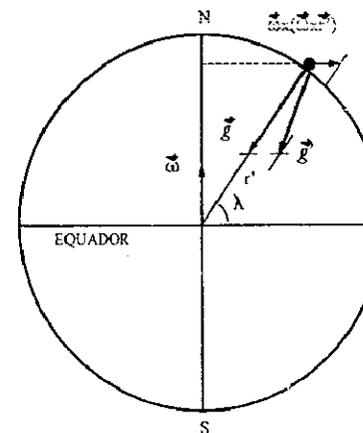
Figura 7.17: Trajetória do disco no referencial não-inercial para $N = 3$.

Substituindo este resultado em (7.62), vem

$$g' = \left(g^2 + 1,14 \times 10^{-3} \cos^2 \lambda - 6,67 \times 10^{-2} g \cos^2 \lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ \simeq \left(g^2 - 6,67 \times 10^{-2} g \cos^2 \lambda \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.64)$$

No pólo norte ($\lambda = 90^\circ$), não há influência da força centrífuga. A maior influência é sobre o equador. Tomando-se que no pólo norte o campo gravitacional vale $9,83 \text{ m/s}^2$, no equador será $g' = 9,80 \text{ m/s}^2$, correspondendo, portanto, a uma diminuição de 0,3% do valor de g (veja o exercício 7 e compare também com o exercício 3.3).

Não é difícil concluir que a componente horizontal (paralela à superfície da Terra) da força de Coriolis produz um desvio nos movimentos para a direita

Figura 7.18: Corpo sobre a superfície da Terra numa latitude λ .

quando se está no hemisfério norte e para a esquerda no hemisfério sul. A Figura 7.19 mostra este efeito em duas situações particulares. O símbolo \otimes representa um vetor (no caso o vetor velocidade) apontando perpendicularmente para dentro (o símbolo \odot representaria apontando para fora). Como vemos, no equador a componente horizontal da aceleração de Coriolis é zero. Nos pólos ela é máxima.

Isto traz algumas conseqüências interessantes. Uma delas é que o movimento pendular não é plano. A Figura 7.20 mostra, de forma exagerada, o que acontece numa vista de cima. A velocidade angular com que o movimento pendular gira em torno do eixo vertical (chamada de precessão) é dada por

$$\Omega = \omega \sin \lambda. \quad (7.65)$$

Este pêndulo foi idealizado por Foucault com o intuito de provar o movimento de rotação da Terra. Segundo ele, se a Terra não girasse o movimento teria de ser plano. Não é difícil chegar a esta conclusão. Imagine o pêndulo colocado em um dos pólos. Note que para um observador inercial situado fora da Terra seria ela que estaria girando embaixo do pêndulo.

Uma outra conseqüência é a formação de ciclones. Eles ocorrem quando uma zona de baixa pressão é formada na atmosfera. Há então um desloca-

Figura 7.19: Efeitos da força de Coriolis.

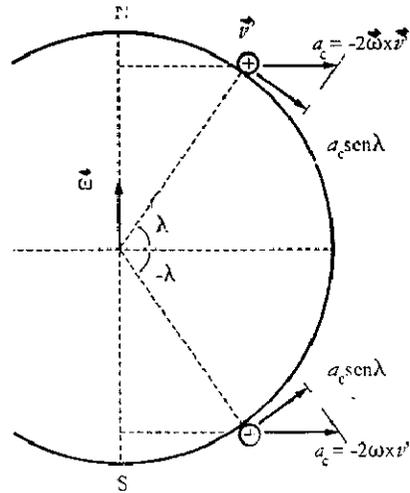
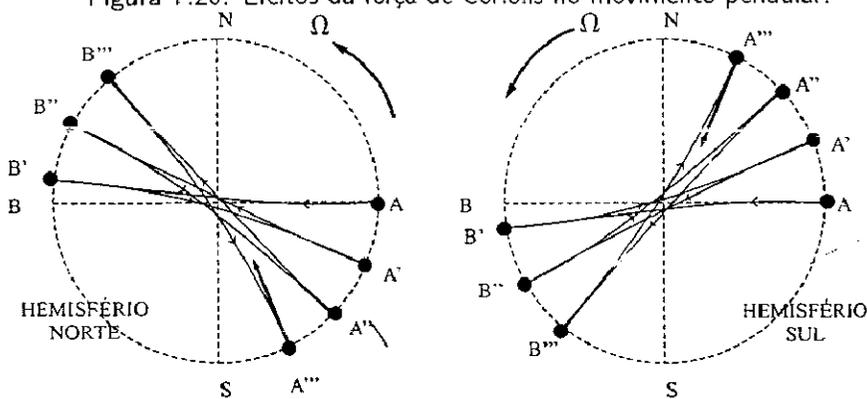


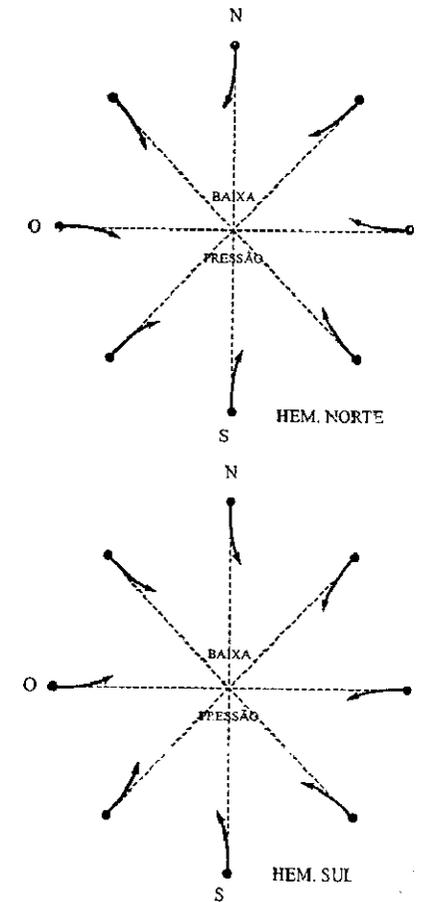
Figura 7.20: Efeitos da força de Coriolis no movimento pendular.



mento de ar em direção a esta região. A Figura 7.21 mostra o que acontece nos dois hemisférios para pontos relativamente distantes da zona de baixa pressão.

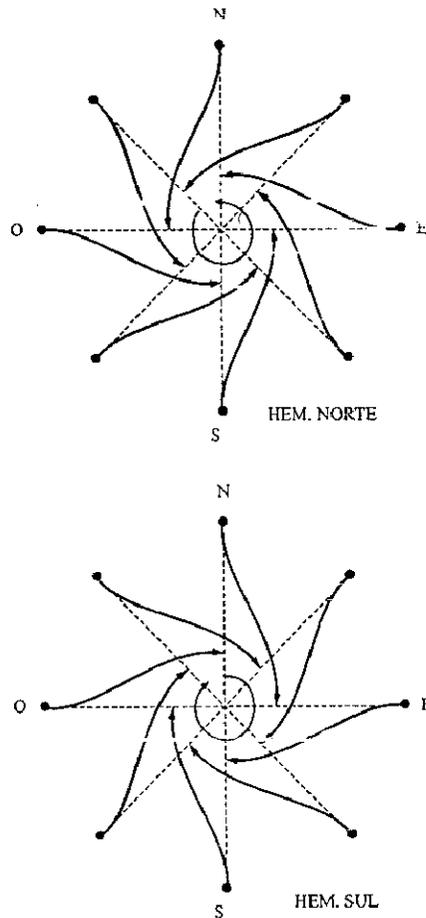
Conforme as moléculas de ar vão se aproximando, passam a existir outros efeitos de pressão e temperatura, que não convém serem discutidos aqui. Os resultados acham-se esquematizados na Figura 7.22. O interessante a ser des-

Figura 7.21: Deslocamento de ar para zona de baixa pressão.



tao é que no hemisfério norte os ciclones giram em sentido anti-horário e no hemisfério sul em sentido horário.

Figura 7.22: Formação de ciclones.



► Exercícios

7.1*. Um remador sobe um rio num barco a remo, com uma velocidade constante. Ao passar sob uma ponte, deixa cair um objeto que flutua nas águas do rio. Ele somente nota o fato após haver remado meia hora. Neste instante, resolve retornar, remando com a mesma intensidade, até encontrar o objeto, que se encontrava a 1 km da ponte, rio abaixo. Achar a velocidade do rio. Resolva este

problema sob o ponto de vista do referencial terra e, depois, do referencial rio.

7.2. Duas partículas, 1 e 2, deslocam-se ao longo dos eixos x e y com velocidades $\vec{v}_1 = 2i \text{ cm/s}$ e $\vec{v}_2 = 3j \text{ cm/s}$. Em $t = 0$, elas estão em $\vec{r}_1 = -3i \text{ cm}$ e $\vec{r}_2 = -3j \text{ cm}$.

a) Qual a velocidade da partícula 2 em relação à partícula 1? Como um observador movendo-se junto com 1 pode afirmar se vai haver ou não colisão entre as partículas?

b) A que instante as partículas estarão mais próximas uma da outra? Qual é esta distância?

7.3*. Um navio a vapor navega no sentido sul a 25 km/h , numa região onde sopra um vento de sudeste a 18 km/h . Qual o ângulo que a fumaça saída da chaminé forma com a direção norte?

7.4. Um elevador sobe com velocidade constante cujo módulo vale 2 m/s . Num dado instante, desprende-se uma lâmpada do teto do elevador. Sabendo-se que sua altura vale 3 m , calcule o tempo que a lâmpada leva para atingir o piso,

- considerando um observador fora do elevador (parado em relação ao solo);
- considerando um observador dentro do elevador.

7.5. O motorista de um carro está indo atrás de um caminhão. Ele nota, então, um pedra presa entre os dois pneus traseiros. Prudentemente, o motorista afasta-se para uma distância de $25,0 \text{ m}$ do caminhão pois, segundo seus cálculos, $22,5 \text{ m}$ seria a distância máxima que a pedra poderia atingir. Qual a velocidade do caminhão?

7.6. Resolva os exercícios IV.6 e IV.7, usando um referencial não inercial onde os corpos estejam em repouso.

7.7*. Qual deveria ser o dia terrestre para que uma pessoa, no equador, não sentisse a ação do campo gravitacional?

7.8*. Uma pessoa está num elevador subindo com aceleração vertical $\vec{\gamma}$. Ele gira um balde com água num círculo vertical de raio R , com habilidade tal a manter a velocidade angular constante.

- Numa posição qualquer, quais as forças que atuam sobre a água?
- Qual a velocidade angular mínima que a pessoa deve imprimir ao sistema para que a água não derrame?
- Qual deveria ser esta velocidade se, em lugar do elevador, a pessoa estivesse num trem, movendo-se horizontalmente com aceleração $\vec{\gamma}$?

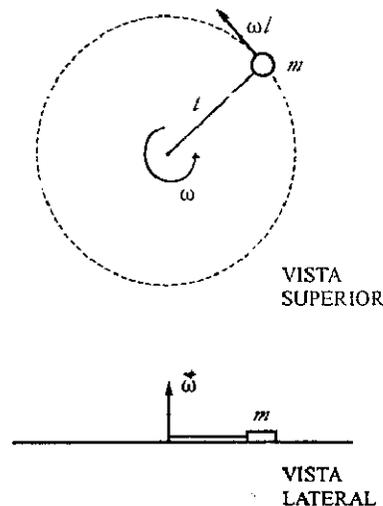
7.9. Para um observador inercial O , o movimento de uma partícula é descrito por $\vec{r}(t) = 5t^3 \hat{i} + 2t \hat{j} - t \hat{k}$ metros (t em segundos). Um outro observador O' vê o movimento da mesma partícula, só que através do seguinte vetor posição $\vec{r}'(t) = 7t^3 \hat{i} + \hat{j} - t \hat{k}$ metros (t em segundos).

- Qual a velocidade do observador O em relação ao observador O' ?
- O observador O' é também inercial? Explique.

7.10*. Um pequeno disco de massa m gira em torno de um ponto O , sobre uma mesa, preso a um fio de comprimento l e massa desprezível, como mostra a Figura 7.23. O atrito entre o disco e a mesa também é desprezível. O sistema descrito está num referencial inercial.

- Faça um diagrama mostrando as forças que atuam sobre o disco de acordo com um observador inercial. Onde estão as reações a estas forças?
- Considere agora um observador localizado no ponto O e girando com a mesma velocidade angular $\vec{\omega}$. Este observador é inercial? Faça um diagrama das forças que atuam no disco segundo ele. Onde estão suas reações?
- Suponha que num determinado instante o fio se rompa. Esquematize a trajetória seguida pelo disco de acordo com os dois observadores descritos nos itens anteriores.

Figura 7.23: Exercício 10.



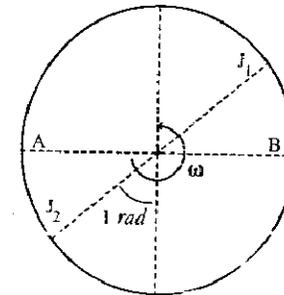
7.11. Dois exímios atiradores A e B (mas péssimos alunos de Física) decidem

tirar suas diferenças num duelo não muito convencional. Eles se colocam numa plataforma circular de raio $R = 25\text{ m}$ e que gira no sentido anti-horário com 8 revoluções por segundo. Eles estão dispostos como mostra a Figura 7.24. J_1 e J_2 são dois juizes cuja disciplina de Mecânica Newtoniana não fazia parte de seus currículos quando estudantes.

Como os atiradores não prestaram a devida atenção durante as aulas de referenciais não inerciais, eles apontam suas armas diretamente um para o outro. O resultado desta trágica disputa é que os juizes foram aivejauo. Sabendo-se que a velocidade das balas (relativamente aos atiradores) é de $400\pi\text{ m/s}$, quem atingiu quem? Esquematize as trajetórias das balas para o referencial girante, especificando as forças que atuam. Considere o peso da bala desprezível.

Para que este exercício seja resolvido sem constrangimentos, deixe-me dizer que os ferimentos dos juizes não foram graves e, após este episódio, as pessoas envolvidas no litígio optaram por atividades mais pacíficas.

Figura 7.24: Exercício 11.



7.12. Um corpo é atirado para cima com uma velocidade \vec{v}_0 . Prove que ele voltará à Terra, deslocado para o oeste, de uma distância igual a $\frac{4}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$, onde λ é a latitude e $h = v_0^2/2g$.

CAPÍTULO 8

Princípios de conservação

O nosso objetivo neste capítulo será estudar os movimentos sob o ponto de vista dos princípios de conservação. Em termos de conteúdo físico, praticamente nada será apresentado de novo. Apenas introduziremos algumas definições, como *trabalho*, *energia cinética*, *momento angular*, *torque* etc. De uma maneira geral, o conteúdo físico continua sendo as leis de Newton. No fundo, o que vamos fazer nada mais é do que rerepresentá-las com uma outra roupagem.

Adiantemos que os princípios de conservação que regem todos os movimentos do universo são três: Os princípios de conservação da *energia*, *momento linear* e *momento angular*. No caso da conservação da energia, veremos que para certos tipos de força (chamada *conservativa*) e a partir da segunda lei de Newton é mostrado que a quantidade

$$E_M = E_c + E_p \quad (8.1)$$

se conserva, onde E_M , E_c e E_p são as *energias mecânica*, *cinética* e *potencial*, respectivamente, cujas definições veremos daqui a pouco. O que será introduzido de novo, isto é, não decorrente das leis de Newton, é admitir que a idéia de conservação de energia tenha um caráter mais amplo do que aquele encerrado na relação (8.1).

Continuaremos neste capítulo tratando do caso de uma partícula. Entretanto, em alguns exemplos poderão aparecer mais de uma. O conceito de sistema de partículas será apresentado formalmente a partir do capítulo seguinte.

8.1 Trabalho e energia cinética

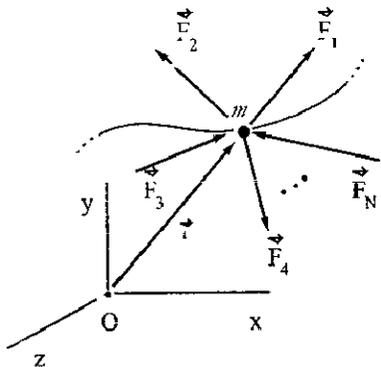
Seja uma partícula de massa m movendo-se sob a ação de várias forças, \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 etc. como mostra a Figura 8.1. Seja $d\vec{r}$ um deslocamento infinitesimal sofrido pela partícula ao percorrer o seu trajeto. Define-se como o *trabalho* realizado pela força \vec{F}_i , ($i = 1, 2, \dots$), neste deslocamento $d\vec{r}$, a quantidade escalar dada por

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}, \quad (8.2)$$

onde o ponto entre \vec{F}_i e $d\vec{r}$ representa produto escalar. Evidentemente, o trabalho realizado por \vec{F}_i desde uma certa posição inicial \vec{r}_a até uma posição final \vec{r}_b é dado por

$$W_{i,ab} = \int_a^b \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (8.3)$$

Figura 8.1: Forças atuando sobre um corpo.



Observe que na definição de trabalho referimo-nos a uma força qualquer das forças que atuam sobre o corpo, não precisando ser, necessariamente, a resultante. Entretanto, se considerarmos o trabalho realizado pela força resultante temos

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_a^b \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{1}{2} m \int_a^b dv^2 \\ &= \frac{1}{2} mv_b^2 - \frac{1}{2} mv_a^2, \end{aligned} \quad (8.4)$$

onde, na segunda passagem, usamos a segunda lei de Newton. A quantidade

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \quad (8.5)$$

é chamada de *energia cinética*.

8.2 Conservação da energia

Primeiramente, vamos introduzir o conceito de *energia potencial*. Começemos dizendo que existem forças na natureza com a seguinte característica:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (8.6)$$

Isto é, cujo trabalho realizado num percurso fechado qualquer é nulo. Como exemplos deste tipo de força, temos o peso e a força da mola. Estas forças são chamadas de *forças conservativas*. Como exemplo mais comum de forças não conservativas, temos a força de atrito cinético (a força de atrito estático não dissipa energia). É fácil ver que ela realmente não satisfaz a relação (8.6). Daqui a pouco, veremos o porquê desses nomes, isto é, forças conservativas e não conservativas.

Pelo teorema de Stokes, podemos transformar a integral de linha da relação (8.6) numa integral de superfície,

$$\int_S (\text{rot } \vec{f}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad (8.7)$$

onde S é uma superfície qualquer, limitada pela curva fechada C da relação anterior. Para que (8.7) seja possível, já que a superfície S possui um alto grau de arbitrariedade, temos

$$\text{rot } \vec{f} = 0, \quad (8.8)$$

ou seja, a força conservativa é uma força irrotacional. Lembrando da identidade que *rot grad* é um operador nulo, podemos escrever a força conservativa f como o gradiente de uma função escalar,

$$\vec{f} = k \text{ grad } \phi, \quad (8.9)$$

onde a função ϕ é chamada de *energia potencial* (E_p) quando a constante k vale -1 (veremos o porquê desta escolha também daqui a pouco). Assim,

$$\vec{f} = -\text{grad } E_p. \quad (8.10)$$

Observe que a energia potencial pode sempre ser determinada a menos de uma constante aditiva qualquer. Esta constante é escolhida convenientemente. No caso da força peso (próximo e longe da superfície da Terra) e da força da mola, tem-se, respectivamente

$$E_p = mgy \quad (8.11)$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad (8.12)$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (8.13)$$

Como podemos ver, na relação (8.11) a energia potencial é nula para um ponto qualquer próximo à (ou sobre a) superfície da Terra. Já em (8.12), o ponto de energia potencial nula está no infinito. No caso da mola, escolhemos que a energia potencial nula ocorre em $x = 0$ (quando a mola não está esticada nem comprimida).

É importante ser destacado que a função energia potencial independe da orientação dos eixos coordenados, visto ser ela uma grandeza escalar. Isto significa, por exemplo, que a energia potencial gravitacional para pontos próximos à superfície da Terra é mgy , independentemente para onde orientamos o eixo y .

Observe que até agora, desde o início da seção, nenhum princípio físico novo foi introduzido. Foram apenas feitas algumas definições (trabalho, energia cinética, energia potencial e força conservativa) e utilizamos a nossa bem conhecida segunda lei de Newton para se chegar até (8.4). Pode ser que você esteja questionando sobre a finalidade de todas estas definições, mas a justificativa de tudo isto vem logo a seguir.

Para a força resultante atuando sobre um corpo temos, de acordo com (8.4),

$$dW = dE_c, \quad (8.14)$$

que independe da natureza dessas forças, isto é, podem ser conservativas ou não. Entretanto, no caso particular de a resultante ser também conservativa, temos (de acordo com a definição de gradiente)

$$dW = -dE_p. \quad (8.15)$$

Combinando (8.14) e (8.15), obtemos

$$dE_c = -dE_p \Rightarrow d(E_c + E_p) = 0 \Rightarrow E_c + E_p = \text{constante}. \quad (8.16)$$

A esta constante é que chamamos de *energia mecânica*:

$$E_M = E_c + E_p. \quad (8.17)$$

Assim, no caso de só atuarem forças conservativas sobre a partícula, a quantidade $E_c + E_p$ (energia mecânica) é uma constante do movimento¹. Esta é a justificativa de que falamos anteriormente para a introdução de todos esses novos conceitos, ou seja, mediante certas condições obtivemos um princípio de conservação. Várias aplicações deste princípio de conservação serão apresentadas como exercícios. Vamos apenas discutir um exemplo que já foi apresentado no final da Seção 3.2, sobre a velocidade de escape da Terra. Vejamos como este problema pode ser resolvido com a utilização da conservação da energia mecânica.

Revolvendo o que foi feito naquela oportunidade, observamos que a única força que atua sobre o corpo é a força gravitacional, que é, como acabamos de ver, conservativa. Assim, tendo em mente a expressão da energia potencial gravitacional dada por (8.12), podemos escrever a energia mecânica do corpo

$$E_M = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{Mm}{r}.$$

Escolhamos dois pontos convenientes para utilizar esta relação: a superfície da Terra e o infinito. Assim,

¹ Agora podemos ver a razão de termos escolhido $\alpha = -1$ na relação (8.9) para definir a energia potencial. Caso tivéssemos escolhido, por exemplo, $\alpha = 1$, o que se conservaria seria $E_c - E_p$. Se escolhêssemos $\alpha = 2$ a conservação seria de $E_c - 2E_p$, e assim por diante.

$$\begin{aligned} \text{Sup. da Terra: } E_M &= \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R}, \\ \text{Infinito: } E_M &= 0. \end{aligned}$$

Como a energia mecânica se conserva, temos

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

que é a mesma relação (3.35).

Para concluir esta seção, levantemos a seguinte questão: E quando as forças que atuam sobre o corpo não são todas conservativas? Neste caso, a energia mecânica não se conserva. Entretanto assumiremos que a energia se conserva. Isto quer dizer que a parcela de energia mecânica que desaparece é transformada em alguma outra forma de energia, cuja natureza depende de cada caso. Chegar à conclusão de que mediante certas condições a quantidade $E_c + E_p$ se conserva, só foi preciso usar a segunda lei de Newton. Entretanto, dizer que a energia se conserva de uma maneira geral é uma hipótese que está acima das leis de Newton. Enfatizemos que ela tem sido verificada até hoje, sem exceção.

8.3 Pequenas oscilações

Este é um assunto que fica bem cômodo de ser estudado fazendo uso dos conceitos de energia. Seja inicialmente um certo sistema com energia potencial que denotaremos por $U(x)$. Consideremos que $x = x_0$ seja um ponto correspondente a *equilíbrio estável*, isto é, $U(x)$ possui um mínimo em $x = x_0$. Portanto,

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0. \quad (8.18)$$

Também, nada impede que escolhamos um nível de energia potencial zero tal que $U(x_0) = 0$. Façamos isto. Seja então uma expansão em série de Taylor da função $U(x)$ em torno do ponto $x = x_0$. Para pequenas oscilações, obtemos

$$U(x) \simeq \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2. \quad (8.19)$$

Introduzindo uma nova variável $\xi = x - x_0$ e chamando $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0}$ de k [uma constante positiva em virtude de (8.18)], vem

$$U(\xi) \simeq \frac{1}{2} k \xi^2, \quad (8.20)$$

que é a energia potencial do oscilador harmônico. Este é mais um exemplo da importância do oscilador harmônico. Estamos vendo que uma função energia potencial qualquer, satisfazendo às condições dadas por (8.18), é a função energia potencial do oscilador harmônico no caso de pequenas oscilações. Convém ressaltar que a variável ξ corresponde a um deslocamento em relação à posição de equilíbrio.

Numa situação mais geral, pode acontecer de a energia potencial ser função de mais de uma variável, isto é, $U = U(x_1, x_2, \dots)$. Chamando estas variáveis genericamente de x_i e considerando que no ponto (x_{10}, x_{20}, \dots) a função U passe por um mínimo (equilíbrio estável), temos

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{i0}} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i=x_{i0}, x_j=x_{j0}} > 0. \quad (8.21)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio e considerando $U = 0$ neste ponto, encontramos, para pequenas oscilações,

$$U(x_i) \simeq \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i=x_{i0}, x_j=x_{j0}} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}). \quad (8.22)$$

Fazendo redefinições análogas ao caso anterior, encontramos

$$U(\xi_i) \simeq \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (8.23)$$

onde os termos diagonais correspondem a osciladores harmônicos.

Vamos discutir dois exemplos. Primeiramente, seja um corpo de massa m , vinculado a se mover sobre uma reta e estando preso a uma mola, cuja outra extremidade é fixa num ponto A . Este ponto está a uma distância l da reta (veja Figura 8.2). É dado ainda que o comprimento de repouso da mola vale l_0 , sendo $l_0 < l$. Estamos querendo saber a frequência angular para pequenas oscilações em torno do ponto O .

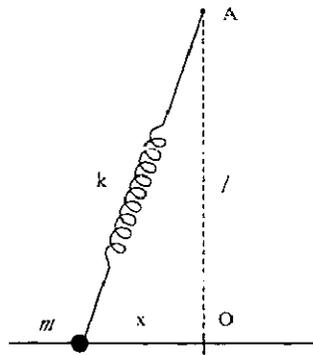
A energia potencial do sistema para a posição do corpo, especificada na Figura 8.2, é dada por

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} k \left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0 \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} k \left(l^2 + x^2 + l_0^2 - 2l_0 \sqrt{l^2 + x^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{8.24}$$

Para pequenas oscilações, temos (não há necessidade de se redefinir a variável pois x já é o deslocamento em relação à posição de equilíbrio)

$$\begin{aligned}
 U &\simeq \frac{1}{2} k \left[l^2 + x^2 + l_0^2 - 2l_0 l \left(1 + \frac{x^2}{2l^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} k \left(1 - \frac{l_0}{l} \right) x^2 + \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{8.25}$$

Figura 8.2: Corpo preso a uma mola e vinculado a se mover horizontalmente.



Como podemos observar, para pequenas oscilações, é como se tivéssemos uma mola de constante dada por $k \left(1 - \frac{l_0}{l} \right)$. Lembrando do que já vimos na Seção V.1, temos que a frequência angular do movimento, para pequenas oscilações, é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l} \right)}.
 \tag{8.26}$$

Observamos ainda que a condição $l_0 < l$, estabelecida no início, é essencial.

Como segundo exemplo, seja o modelo simples de uma molécula linear triatômica e simétrica, como mostra a Figura 8.3. As molas, unindo os átomos, estão apenas simbolizando o que já discutimos, ou seja, que para pequenas oscilações a energia potencial de interação é aproximadamente a do oscilador harmônico. As quantidades x_1 , x_2 e x_3 referem-se às posições de cada átomo. Seja b a distância dos átomos de massa m ao de massa M na configuração de equilíbrio. O nosso objetivo é obter as frequências de vibração do sistema.

Primeiramente, escrevamos sua energia potencial (considerando pequenas oscilações)

$$U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{1}{2} k (x_3 - x_2 - b)^2.
 \tag{8.27}$$

Os deslocamentos infinitesimais dos átomos no entorno das posições de equilíbrio são

$$\xi_i = x_i - x_{i0},
 \tag{8.28}$$

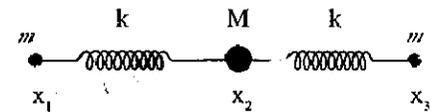
onde $x_{20} = x_{10} + b$ e $x_{30} = x_{20} + b$. Então,

$$\begin{aligned}
 x_2 - x_1 - b &= x_2 - x_1 - x_{20} + x_{10} = \xi_2 - \xi_1, \\
 x_3 - x_2 - b &= x_3 - x_2 - x_{30} + x_{20} = \xi_3 - \xi_2.
 \end{aligned}
 \tag{8.29}$$

Com estas quantidades, a função energia potencial do sistema fica

$$U = \frac{1}{2} k \left[(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2 \right].
 \tag{8.30}$$

Figura 8.3: Modelo simples de molécula triatômica.



Para calcular as frequências de vibração do sistema, temos de recorrer às equações de movimento. Assim, considerando que a força que atua em cada partícula vale

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad (8.31)$$

temos, usando a segunda lei de Newton,

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 + k\xi_1 - k\xi_2 &= 0, \\ M\ddot{\xi}_2 - k\xi_1 + 2k\xi_2 - k\xi_3 &= 0, \\ m\ddot{\xi}_3 - k\xi_2 + k\xi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.32)$$

As frequências angulares de vibração podem ser obtidas fazendo-se a substituição $\xi_i = A_i e^{i\omega t}$ (veja Seção 5.1). Assim, temos

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2) A_1 - kA_2 &= 0, \\ -kA_1 + (2k - M\omega^2) A_2 - kA_3 &= 0, \\ -kA_2 + (k - m\omega^2) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Para evitar a solução trivial, isto é, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, devemos fazer

$$\det \begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2(k - m\omega^2)(mM\omega^2 - 2km - kM) = 0. \quad (8.34)$$

As soluções possíveis para ω são

$$\begin{aligned} \omega_a^2 &= 0, \\ \omega_b^2 &= \frac{k}{m}, \\ \omega_c^2 &= \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right). \end{aligned} \quad (8.35)$$

A primeira frequência de vibração, $\omega_a = 0$, deve corresponder ao fato de termos a possibilidade de um movimento sem ser realmente oscilatório, isto é, os três

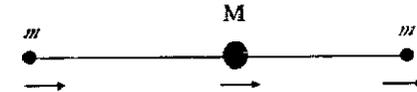
átomos transladando-se como um corpo rígido. Observando as expressões para ω_b e ω_c , temos que ω_b deve corresponder a um movimento oscilatório com M fixo, como se os átomos de massa m agissem independentemente de M . É claro que ω_c deve corresponder a um movimento mais geral com M se deslocando também.

Tudo isto que falamos acima pode ser confirmado através das equações (8.33), calculando as relações entre as amplitudes de movimento e as fases. Vejamos. Para $\omega = \omega_a$, temos

$$\begin{aligned} kA_{1a} - kA_{2a} &= 0 \Rightarrow A_{1a} = A_{2a} \\ -kA_{1a} + 2kA_{2a} - kA_{3a} &= 0 \Rightarrow A_{2a} = A_{3a}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Então, $A_{1a} = A_{2a} = A_{3a}$. Como todos têm a mesma dependência harmônica, o movimento é como se fosse um corpo rígido. A Figura 8.4 mostra esquematicamente os deslocamentos num certo instante qualquer.

Figura 8.4: Deslocamentos dos átomos para $\omega = \omega_a$.

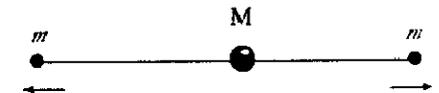


para $\omega = \omega_b$, temos

$$\begin{aligned} A_{2b} &= 0, \\ A_{1b} &= -A_{3b}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

que está ilustrado na Figura 8.5 como exemplo deste movimento

Figura 8.5: Caso em que $\omega = \omega_b$ (oscilações simétricas).

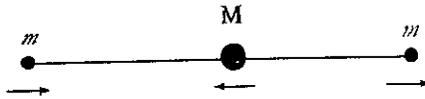


Para o caso de $\omega = \omega_c$, encontramos

$$\begin{aligned} A_{2c} &= -\frac{2m}{M} A_{3c}, \\ A_{1c} &= \frac{4m^2}{M^2} A_{3c}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

como é mostrado na Figura 8.6.

Figura 8.6: Caso em que $\omega = \omega_c$ (oscilações assimétricas).



Uma vibração geral da molécula, que não envolva deslocamento rígido, será dada por uma combinação linear das soluções para ω_b e ω_c .

8.4 Conservação dos momentos linear e angular

A definição de *momento linear* já foi introduzida na expressão (2.5), quando da apresentação da segunda lei de Newton. Vamos revisá-lo aqui e também introduzir os conceitos de *momento angular* e *torque*. Estes, ao contrário de momento linear e força, levam em conta a posição da origem do sistema de coordenadas (ou outro ponto qualquer de referência).

Por definição, o momento angular de uma partícula de massa m em relação à origem do sistema de coordenadas é dado por

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (8.39)$$

onde \vec{r} é o vetor posição da partícula e $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear. Já o torque, correspondente a uma força \vec{F}_i (não necessariamente a resultante) é definido por

$$\vec{\tau}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i. \quad (8.40)$$

Primeiramente, vejamos quanto ao princípio de conservação do momento linear. Ele decorre da segunda lei de Newton. É fácil concluir que se a resultante das forças que atuam sobre uma partícula é nula, o seu momento linear é constante.

Para obtermos a condição para a conservação do momento angular, derivemos (8.39) com respeito ao tempo. Assim,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (8.41)$$

Por que o termo $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$, que aparece na primeira passagem, é nulo? Como $d\vec{p}/dt$ é a força resultante (segunda lei de Newton), temos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}. \quad (8.42)$$

Convém frisar que na relação acima, $\vec{\tau}$ é o torque da força resultante e tomado em relação ao mesmo ponto em que foi tomado o momento angular. É fácil então obter a condição para a conservação do momento angular de uma partícula: **Se o torque da força resultante é nulo, o momento angular da partícula (tomado em relação ao mesmo ponto em que foi tomado o torque) é constante.**

Vamos discutir dois exemplos envolvendo os princípios de conservação para uma partícula, mais especificamente a conservação da energia e momento angular. A conservação do momento linear será de grande utilidade quando aplicada a um sistema de partículas. No caso de uma partícula, é um conceito praticamente embutido no de referencial inercial.

Como primeiro exemplo, seja uma partícula de massa m movendo-se sobre a parte interna de uma superfície cônica, sem atrito (veja Figura 8.7). Pela geometria do problema, é conveniente usar coordenadas cilíndricas². Assim, a energia mecânica da partícula (que é conservada) é dada por

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mgz. \quad (8.43)$$

Em virtude de a partícula estar se movimentando sobre uma superfície cônica, temos o seguinte vínculo envolvendo as coordenadas

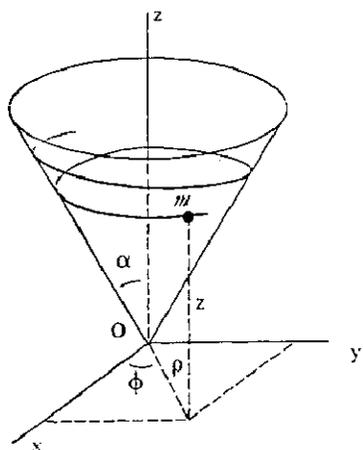
$$\text{tg } \alpha = \frac{\rho}{z}. \quad (8.44)$$

Usando esta relação em (8.43) podemos eliminar a coordenada ρ ,

²Coordenadas cilíndricas nada mais são do que coordenadas polares (veja exercício 2.5) acrescidas da coordenada cartesiana z .

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}m \left(\text{tg}^2 \alpha \dot{z}^2 + \text{tg}^2 \alpha z^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz \\
 &= \frac{1}{2}m \left(\text{tg}^2 \alpha z^2 \dot{\phi}^2 + \sec^2 \alpha \dot{z}^2 \right) + mgz.
 \end{aligned}
 \tag{8.45}$$

Figura 8.7: Partícula movendo-se no interior de uma superfície cônica.



É evidente que o momento linear da partícula não é conservado. Vejamos quanto ao momento angular. Observando o torque (em relação ao ponto O) das forças que atuam sobre a partícula, não é difícil perceber que ele não apresenta componente ao longo do eixo z (veja Figura 8.8). Isto significa, conseqüentemente, que a componente em z do momento angular é constante. Vamos calcular l_z (escreveremos a expressão geral do momento angular mas só nos preocuparemos em manter l_z)

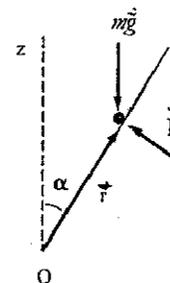
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\rho \hat{\rho} + z \hat{k}) \times (\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k}) = m \rho^2 \dot{\phi} \hat{k} + \dots \tag{8.46}$$

Portanto,

$$l_z = m \rho^2 \dot{\phi} = \text{const.} \tag{8.47}$$

Usando novamente a relação (8.44), obtemos

Figura 8.8: Forças que atuam sobre a partícula.



$$l_z = m \text{tg}^2 \alpha z^2 \dot{\phi}. \tag{8.48}$$

Combinando agora (8.45) e (8.48), podemos escrever uma expressão só em termos da variável z (as demais quantidades que aparecem são constantes). Temos então

$$E = \frac{1}{2} m \sec^2 \alpha \dot{z}^2 + \frac{l_z^2}{2m \text{tg}^2 \alpha z^2} + mgz. \tag{8.49}$$

Desta relação, podemos concluir que a obtenção de $z(t)$ fica dependendo "apenas" do cálculo de uma integral

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \left(\frac{2E}{m \sec^2 \alpha} - \frac{l_z^2}{m^2 \sec^2 \alpha \text{tg}^2 \alpha z^2} - \frac{2gz}{\sec^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 t &= \int_{z_0}^z dz \left(\frac{2E}{m \sec^2 \alpha} - \frac{l_z^2}{m^2 \sec^2 \alpha \text{tg}^2 \alpha z^2} - \frac{2gz}{\sec^2 \alpha} \right)^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}
 \tag{8.50}$$

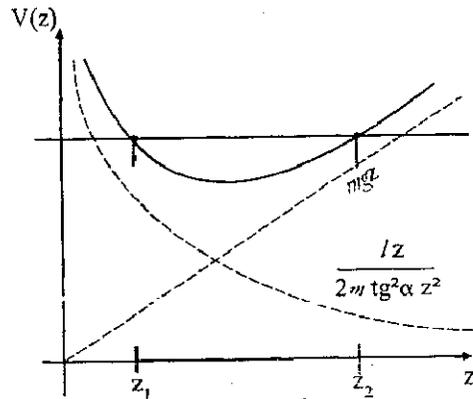
Fica claro o porquê do "apenas" mencionado no parágrafo anterior. Esta é uma integral de difícil solução, só sendo possível (de uma maneira geral) através de métodos numéricos. Entretanto, podemos obter informações qualitativas sobre o movimento, fazendo uma análise gráfica decorrente de (8.49). Seja a representação gráfica da quantidade

$$V(z) = \frac{l_z^2}{2m \text{tg}^2 \alpha z^2} + mgz \tag{8.51}$$

versus z . Vamos fazer apenas um esboço do gráfico. Tendo em conta que $V(z)$ é a soma de $l_z^2/2mtg^2\alpha z^2$ e mgz , o esboço do gráfico fica facilmente obtido, como é mostrado na Figura 8.9. A linha reta paralela ao eixo z (representando uma constante) corresponde à energia mecânica do sistema. É fácil observar pela relação (8.49) que $V(z)$ não pode ser maior que E , pois isto acarretaria o termo $\frac{1}{2}m \sec^2 \alpha \dot{z}^2$ poder ser negativo, o que obviamente não é possível. Assim, o movimento da partícula está limitado entre z_1 e z_2 . É um movimento oscilatório, isto é, o corpo desce, girando dentro da superfície cônica, até atingir uma altura mínima z_1 , depois sobe até atingir a altura z_2 e assim por diante.

A análise que fizemos é conhecida como *curvas de potencial*, muito embora a quantidade $V(z)$ não seja a energia potencial do sistema.

Figura 8.9: Esboço do gráfico de $V(z)$ versus z .

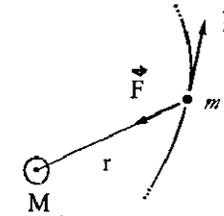


Como segundo exemplo, estudaremos o movimento sob a interação gravitacional. Isto já foi feito parcialmente na Seção 3.2. Entretanto, como foi dito naquela oportunidade, ficou faltando calcular quais as trajetórias possíveis do corpo sob interação gravitacional e uma análise um pouco mais profunda do problema. É justamente isto que vamos fazer agora.

Seja um corpo de massa m num campo gravitacional criado por um corpo de massa M . Consideremos que M seja muito maior que m , tal que praticamente só m se mova. Veja detalhes na Figura 8.10.

Percebemos que o torque da força \vec{F} em relação ao centro de M é nulo. Conseqüentemente, o momento angular em relação a este ponto é constante. Este resultado traz duas conseqüências imediatas. A primeira é que, sendo o

Figura 8.10: Corpo de massa m movendo-se num campo gravitacional criado por M .



vetor momento angular constante, os vetores \vec{r} e \vec{p} sempre estarão num mesmo plano. Portanto, o movimento é plano. A segunda conseqüência é obtida ao se tomar o módulo do vetor momento angular. Escrevamo-lo em coordenadas polares (veja o exercício I.5).

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m r \hat{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) = m r^2 \dot{\theta} \hat{k}. \quad (8.52)$$

A quantidade $m r^2 \dot{\theta}$ é constante. Vejamos qual o seu significado. A Figura 8.11 mostra a área varrida pelo vetor posição do corpo de massa m num intervalo de tempo infinitesimal dt . Esta área é dada por

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (8.53)$$

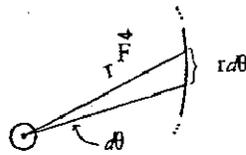
Dividindo ambos os lados desta expressão pelo intervalo de tempo dt , temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}, \quad (8.54)$$

que é uma constante de acordo com (8.52). Portanto, a área varrida pelo vetor posição do corpo sob ação do campo gravitacional varia linearmente com o tempo, isto é, em intervalos de tempo iguais as áreas varridas são iguais. Este resultado é conhecido como *segunda lei de Kepler do movimento planetário*.

É bom ressaltar que as duas conclusões a que chegamos, isto é, de o movimento ser plano e lei das áreas, não são restritas apenas à força gravitacional, ou forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância. É fácil ver que a única condição é de que a força seja central (força voltada para um centro fixo).

A energia mecânica do sistema também se conserva. Assim, usando o fato de que o movimento é plano podemos escrever

Figura 8.11: Área varrida pelo vetor posição num intervalo de tempo dt .

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}. \quad (8.55)$$

Agora, estamos usando o caso particular de interação gravitacional. Eliminando a variável θ pelo uso da expressão (8.52), obtemos

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}. \quad (8.56)$$

Poderíamos aqui fazer uma análise semelhante à que foi feita no exemplo anterior, através das curvas de potencial. Entretanto, o problema que estamos estudando agora admite solução exata. Vamos então obtê-la. Depois, a título de ilustração, faremos a análise através das curvas de potencial. Da relação (8.56), vem

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}. \quad (8.57)$$

Em lugar de tentar resolver diretamente a equação acima para obter r em função de t , vamos eliminar a dependência do tempo desta expressão com o uso de (8.52). Isto significa que vamos partir diretamente para a obtenção da equação da trajetória em termos de r e θ . Assim, temos,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta}. \quad (8.58)$$

Levando este resultado em (8.57), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{mr^2}{l} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)} \\ &= r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GMm^2}{l^2 r}}. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Fazendo $r = 1/u$, acarretará uma expressão mais simples de ser manuseada,

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2GMm^2}{l^2} u - u^2}. \quad (8.60)$$

Assim, a solução do problema é dada pelo cálculo da seguinte integral

$$\theta - \theta_0 = -\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2GMm^2}{l^2} u - u^2}} \quad (8.61)$$

Antes de resolver esta integral, achamos oportuno fazer um comentário. Como já tínhamos dito na Seção 3.2, no estudo inicial do movimento sob força gravitacional, poderíamos ter tratado este problema com o uso direto da segunda lei de Newton e da lei da gravitação. Caso tivéssemos adotado este procedimento, teríamos obtido duas equações diferenciais de segunda ordem envolvendo as variáveis r e θ [veja Eqs. (3.27)]. Assim, a solução do problema ficaria em termos de quatro constantes, características das soluções das equações diferenciais mencionadas. O que estamos fazendo aqui é partir de duas constantes conhecidas do problema, a energia mecânica e o momento angular. Em consequência, isto implica em resolver apenas equações de primeira ordem, obtidas de (8.52) e (8.56).

A integral dada por (8.61) e sua solução são do tipo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + \text{const.} \quad (8.62)$$

No nosso caso,

$$a = \frac{2mE}{l^2}, \quad b = \frac{2GMm^2}{l^2} \quad \text{e} \quad c = -1. \quad (8.63)$$

Assim, a solução de (8.61) é

$$\theta - \theta' = -\arccos \frac{\frac{l^2 u}{GMm^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2 M^2 m^2}}}, \quad (8.64)$$

onde incorporamos em θ' a constante decorrente do limite de integração u_0 . Voltando à variável r e trabalhando um pouco o resultado, encontramos

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3}} \cos(\theta - \theta') \right], \quad (8.65)$$

A equação (8.65) é do tipo

$$\frac{1}{r} = C \left[1 + \epsilon \cos(\theta - \theta') \right], \quad (8.66)$$

que é a equação de uma cônica com um foco na origem, onde C é uma constante e ϵ é a excentricidade da curva. O tipo de cônica depende da excentricidade (veja Figura 8.12). No nosso caso,

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2M^2m^3}}, \quad (8.67)$$

ou seja, a excentricidade está relacionada à energia. Assim o tipo de cônica (e conseqüentemente a trajetória) dependerá da energia:

$$\begin{aligned} \epsilon > 1 (E > 0) &: \text{hipérbole,} \\ \epsilon = 1 (E = 0) &: \text{parábola,} \\ \epsilon < 1 (E < 0) &: \text{elipse.} \end{aligned} \quad (8.68)$$

O movimento circular é um caso particular de trajetória elíptica, dado por $\epsilon = 0$. Isto corresponde a uma energia dada por $E = -G^2M^2m^3/2l^2$. Notamos também que somente no caso onde $E < 0$ o corpo de massa m fica preso no campo gravitacional criado por M . Para $E \geq 0$, o movimento não é limitado (casos de parábola e hipérbole). O que acabamos de ver confirma o estabelecido na chamada primeira lei de Kepler, de que os planetas movem-se em trajetórias elípticas em torno do Sol.

Vejamos, agora, como seria a análise através das curvas de potencial. É claro que os resultados dados por (8.68) serão novamente obtidos, mas agora de forma qualitativa. Esboçemos o gráfico de $V(r)$

$$V(r) = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (8.69)$$

obtido da relação (8.56), versus r (Figura 8.13). Nitidamente o gráfico nos mostra que só haverá movimento periódico se $E < 0$.

Para finalizar, vamos mostrar que a terceira lei de Kepler do movimento planetário, de que o quadrado do período de revolução é proporcional ao cubo do semi-eixo maior, também está contido na teoria de Newton. Sejam a e b

Figura 8.12: Esboços de cônicas e excentricidades.

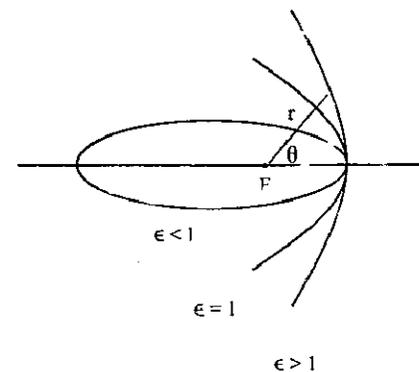
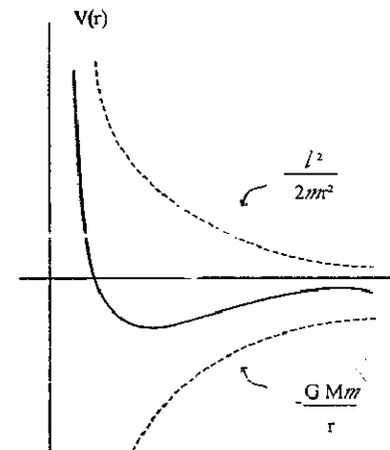


Figura 8.13: Gráfico de $V(r)$ versus r .



os semi-eixos maior e menor da elipse. Como a área da elipse é πab , temos, partindo de (8.54),

$$\pi ab = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} T, \quad (8.70)$$

onde T é o período. Usando (8.52), obtemos

$$T = \frac{2\pi c^3 m}{l}. \quad (8.71)$$

Lembrando que, numa elipse, $a^2 = b^2 + c^2$, onde c é a semidistância focal, e que $\epsilon = c/a$, temos

$$b^2 = a^2(1 - \epsilon^2). \quad (8.72)$$

Substituindo este resultado em (8.71), vem

$$T = \frac{2\pi m}{l} a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (8.73)$$

Partindo de (8.65) e (8.66), podemos escrever

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{1}{C(1+\epsilon)} + \frac{1}{C(1-\epsilon)} = \frac{2}{C(1-\epsilon^2)} \\ \Rightarrow 1 - \epsilon^2 &= \frac{1}{Ca} = \frac{l^2}{GMm^2 a}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Levando este resultado em (8.73), finalmente obtemos

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{MG} a^3. \quad (8.75)$$

8.5 Mais algumas aplicações

Vamos concluir este estudo, discutindo mais duas aplicações decorrentes dos princípios de conservação nos movimentos sob força central, mais especificamente no caso de forças dependentes do inverso do quadrado da distância.

Como primeira aplicação, mostraremos que neste tipo de problema existe uma outra quantidade conservada, além do momento angular e da energia. Vamos iniciar considerando um movimento geral sob força central, isto é,

$$\vec{F} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (8.76)$$

Pela segunda lei de Newton, temos

$$\dot{\vec{p}} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (8.77)$$

Multiplicando ambos os lados desta relação vetorialmente pelo momento angular, vem

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} \times \vec{l} &= \frac{mf(r)}{r} [\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})] = \frac{mf(r)}{r} [(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r} - r^2 \dot{\dot{\vec{r}}}] \\ &= \frac{mf(r)}{r} (r\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} - r^2 \dot{\dot{\vec{r}}}) = -mf(r)r^2 \left(\frac{\ddot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\dot{\vec{r}}}{r^2} \right) \\ &= -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right). \end{aligned} \quad (8.78)$$

Para o caso particular de forças dependentes do inverso do quadrado da distância, isto é,

$$f(r) = -\frac{k}{r^2}, \quad (8.79)$$

onde genericamente escrevemos a constante k em lugar do caso particular GMm^3 . Como \vec{l} é um vetor constante, vem

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} \times \vec{l} - \frac{mk\vec{r}}{r} \right) = 0. \quad (8.80)$$

Portanto, a quantidade conservada a que nos referimos no início é

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{l} - \frac{mk\vec{r}}{r}, \quad (8.81)$$

que é conhecida como *vetor de Runge-Lenz*. Como $\vec{A} \cdot \vec{l} = 0$, este vetor está no plano de r e p .

Se lembrarmos do que comentamos após a Eq. (8.61), é importante destacar que temos agora três constantes conhecidas (E, l, A) das quatro necessárias para se resolver o problema (considerando, de início que o movimento seja plano). Como uma das constantes é simplesmente um irrelevante ângulo inicial, o problema deve ser então resolvido com o conhecimento das três constantes mencionadas. Realmente isto acontece. O produto escalar de \vec{A} com \vec{r} fornece

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{r} &= \vec{p} \times \vec{l} \cdot \vec{r} - mk r \\ \Rightarrow A r \cos(\theta - \theta') &= \vec{r} \times \vec{p} \cdot \vec{l} - mk r = l^2 - mk r. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Então

³Além da força gravitacional, um outro exemplo importante deste tipo de força é a força coulombiana, que fará parte da segunda aplicação, que veremos a seguir.

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left[\mathbf{i} + \frac{A}{mk} \cos(\theta - \theta') \right], \quad (8.83)$$

que é a equação de uma cônica. Podemos expressar a constante A em termos de l e E^4 . Da relação (8.81), vem

$$\begin{aligned} 4^2 &= \left(\vec{p} \times \vec{l} - \frac{mk\vec{r}}{r} \right) \cdot \left(\vec{p} \times \vec{l} - \frac{mk\vec{r}}{r} \right) \\ &= (\vec{p} \times \vec{l}) \cdot (\vec{p} \times \vec{l}) + m^2 k^2 - \frac{2mk}{r} \vec{p} \times \vec{l} \cdot \vec{r} \\ &= p^2 l^2 + m^2 k^2 - \frac{2mk}{r} \vec{r} \times \vec{p} \cdot \vec{l} \\ &= p^2 l^2 + m^2 k^2 - \frac{2mk}{r} l^2 \\ &= 2ml^2 \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \right) + m^2 k^2 \\ &= 2mEl^2 + m^2 k^2. \end{aligned} \quad (8.84)$$

Portanto,

$$\frac{A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (8.85)$$

Substituindo este resultado em (8.83), obtemos

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right], \quad (8.86)$$

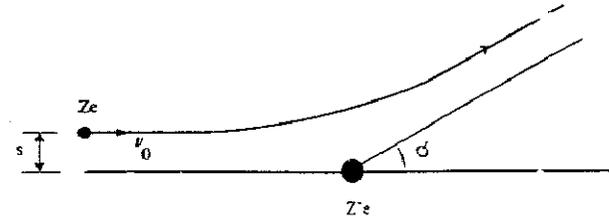
que é a já obtida expressão (8.65).

Como segunda aplicação, consideremos partículas de carga Ze incidindo sobre núcleos pesados de carga $Z'e$. Este problema foi inicialmente estudado por Rutherford, onde as partículas incidentes eram partículas α e os núcleos alvos eram núcleos de átomos de uma fina folha de ouro.

As trajetórias seguidas pelas partículas são hipérbolas ($E > 0$). A Figura 8.14 mostra esquematicamente esta trajetória, considerando as cargas das partículas incidentes de mesmo sinal das partículas do núcleo (ambas positivas).

⁴Em princípio, isto poderia parecer que a constante A não é independente. Convém lembrar que esta constante é o módulo do vetor \vec{A} , que é um vetor independente do vetor \vec{l} . Lembrar de que $\vec{A} \cdot \vec{l} = 0$.

Figura 8.14: Partículas carregadas sendo espalhadas por um núcleo.



A distância s é chamada de *parâmetro de impacto* e o desvio sofrido pela partícula incidente de *espalhamento*. O ângulo ϕ é o *ângulo de espalhamento*, isto é, o ângulo formado entre as direções assintóticas incidente e espalhada.

Pelo conhecimento do parâmetro de impacto e da energia da partícula incidente, o ângulo de espalhamento fica perfeitamente determinado. A Figura 8.15 mostra com detalhes os elementos geométricos da hipérbole. Por esta figura, podemos escrever

$$2\psi + \phi = \pi. \quad (8.87)$$

Mas ψ corresponde ao ângulo θ quando $r \rightarrow \infty$. Assim, pela relação (8.66), obtemos ($\theta' = \pi$ para a situação da Figura 8.15)

$$\cos \psi = \frac{1}{\epsilon}. \quad (8.88)$$

Usando (8.37), vem

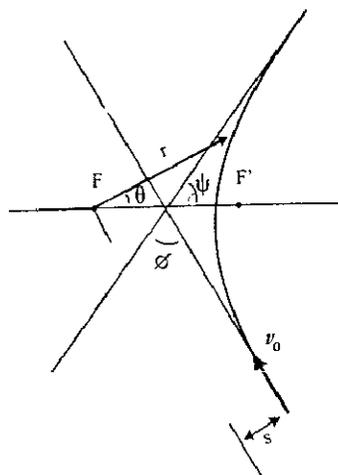
$$\sin \frac{\phi}{2} = \frac{1}{\epsilon}. \quad (8.89)$$

A excentricidade, para os dados deste problema, é

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(\kappa Z Z' e^2)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Es}{\kappa Z Z' e^2} \right)^2}, \quad (8.90)$$

onde,

Figura 8.15: Elementos geométricos da hipérbole.



$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_0^2, \\ l &= m v_0 s, \\ \kappa &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Combinando (8.89) e (8.90), obtém-se

$$\frac{\phi}{2} = \frac{2Es}{\kappa Z Z' e^2}. \quad (8.92)$$

Entretanto, esta relação possui pouco sentido prático, pois ela não pode ser verificada experimentalmente (note que o parâmetro de impacto não é algo que possa ser medido para o caso de espalhamento por núcleos atômicos).

Vamos introduzir uma outra grandeza, chamada *seção de choque*, que é medida experimentalmente e que, conforme veremos a seguir, pode também ser calculada teoricamente, constituindo-se portanto num teste da teoria. Seja N o número de partículas incidentes sobre uma fina folha contendo n núcleos (alvos) por unidade de área e seja dN o número de partículas espalhadas entre ϕ e $\phi + d\phi$. A seção diferencial de choque é definida pela relação

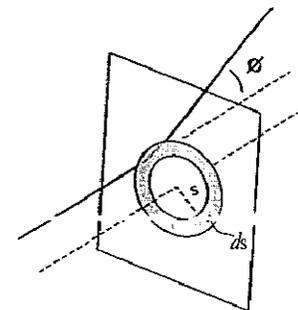
$$\frac{dN}{N} = n d\sigma. \quad (8.93)$$

Como vemos, $d\sigma$ possui a dimensão de área e pode ser determinada experimentalmente (n e N são conhecidos e dN pode ser diretamente contado).

O cálculo teórico da seção diferencial de choque é fácil de ser obtido se atentarmos para o fato de que as partículas espalhadas entre ϕ e $\phi + d\phi$ são aquelas incidentes na área limitada pelo anel entre s e $s + ds$, como esclarece a Figura 8.16. Portanto, a área entre s e $s + ds$ é a seção de choque,

$$d\sigma = 2\pi s ds. \quad (8.94)$$

Figura 8.16: Detalhamento da seção de choque.



Obtendo s e ds da relação (8.92) e substituindo em (8.94), vem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa Z Z' e^2}{2E} \right)^2 \csc^4 \frac{\phi}{2}, \quad (8.95)$$

onde $d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi$ é o ângulo sólido para o espalhamento considerado.

A relação (8.95) é a famosa fórmula de espalhamento de Rutherford. Ela está de acordo com resultados experimentais. Convém citar que, embora o seu cálculo tenha sido feito classicamente, os cálculos através da mecânica quântica conduzem ao mesmo resultado.

► Exercícios

8.1. Sobre um corpo, movendo-se ao longo do eixo x , atua uma força dada por $\vec{F}(x) = (3x^2 - 6x)\hat{i}$ Newtons. Qual o trabalho realizado por esta força desde

- $x = 0$ até $x = 1\text{ m}$?
- $x = 0$ até $x = 3\text{ m}$?
- $x = 0$ até $x = 5\text{ m}$?

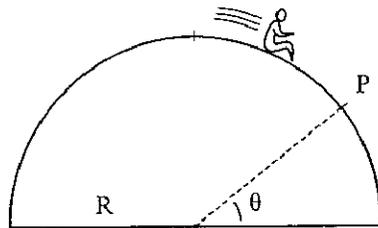
8.2. Um corpo move-se horizontalmente, ao longo do eixo x , sob a ação da força exercida por uma mola ($\vec{F} = -kx\hat{i}$). Calcule o trabalho realizado por esta força desde $x = 0$ (posição de equilíbrio da mola) até uma posição arbitrária x , positiva ou negativa.

8.3. Sobre uma partícula, age uma força dada por $\vec{F} = x^2y\hat{i} + y^2x\hat{j}$. Calcule o trabalho realizado por esta força desde $(0, 0)$ até $(1, 1)$ nos seguintes casos:

- ao longo da reta $y = x$;
- ao longo da parábola $y = x^2$.

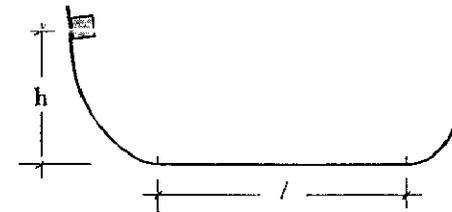
8.4. Um garoto de massa m desliza sobre uma superfície esférica, sem atrito, desde o seu topo, onde estava inicialmente parado (veja Figura 8.17). Determine o ponto P onde ele abandona a superfície e o ponto onde atinge a superfície horizontal.

Figura 8.17: Exercício 4.



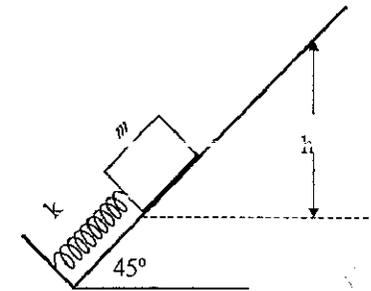
8.5. Um corpo desliza sobre um trilho que como mostra a Figura 8.18. A parte plana do trilho possui comprimento $l = 2,0\text{ m}$ e as partes curvas apresentam atrito desprezível. O coeficiente de atrito cinético na região plana é $\mu_c = 0,20$. Larga-se o corpo no ponto A , cuja altura é $h = 1,0\text{ m}$ acima da parte plana do trilho. Aonde o corpo irá parar?

Figura 8.18: Exercício 5.



8.6. Um bloco de massa $m = 1,0\text{ kg}$ está comprimindo uma mola, num plano inclinado, através de uma agente externo qualquer (veja Figura 8.19 – o agente externo não está especificado na figura), de uma distância $d = 0,1\text{ m}$ em relação à posição de equilíbrio. Num determinado instante, o dispositivo que faz o corpo comprimir a mola é desativado. Qual a altura h atingida pelo corpo, sabendo-se que $\mu_c = 0,5$ e $k = 3,0 \times 10^4\text{ N/m}$?

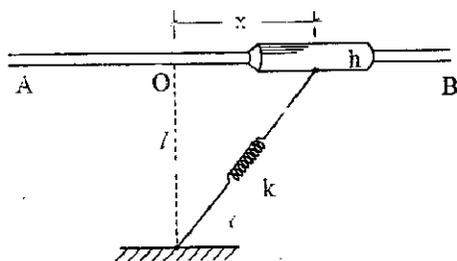
Figura 8.19: Exercício 6.



8.7*. No dispositivo representado na Figura 8.20, a peça P , de massa m , pode deslizar com atrito desprezível ao longo de uma haste fixa AB . O comprimento relaxado da mola é l_0 ($l_0 < l$). Larga-se a peça com velocidade inicial numa distância x da posição de equilíbrio O . Com que velocidade passará por este ponto?

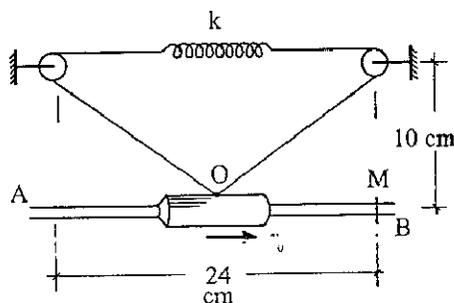
8.8. Uma luva de massa $0,5\text{ kg}$ pode deslizar sem atrito ao longo de uma haste fixa AB . Sabendo-se que a mola está relaxada na configuração simétrica mostrada na Figura 8.21 e que seu coeficiente vale $1,0 \times 10^2\text{ N/m}$, com que velocidade v_0

Figura 8.20: Exercício 7.



a) a luva deverá passar por O para poder atingir o ponto M . Despreze também o atrito entre as polias e o eixo.

Figura 8.21: Exercício 8.



8.9. Uma partícula, movimentando-se ao longo do eixo x , possui energia potencial dada por $E_p = ax^2 - bx^3$, onde a e b são constantes positivas.

- Esboce o gráfico da função $E_p(x)$.
- Qual é a posição de equilíbrio estável da partícula?
- Quais são os limites entre os quais deve variar a energia total para que o movimento possa ser oscilatório?
- Qual é a força que age sobre a partícula em $x = a/b$?

8.10. Uma partícula possui movimento unidimensional numa região onde a força é dada por $\vec{F}(x) = (3x^2 - 6x)\hat{i}$ Newtons (x em metros).

- Determine a função energia potencial da partícula sabendo-se que $E_p(0) = 0$. Esboce o gráfico de $E_p(x)$.

- Para que valores da energia mecânica existe movimento oscilatório?
- Determine os limites do movimento para $E_M = 3 J$ e $E_M = 5 J$.
- Em que intervalo de valores de x a força na partícula está dirigida no sentido positivo do eixo x ?
- Para $E_M = 5 J$, qual é a velocidade da partícula em $x = -1 m$ e em $x = 4 m$ (considere $m = 1 kg$)?

8.11. A energia potencial de interação entre dois átomos de uma molécula diatômica tem aproximadamente a forma

$$E_p(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}},$$

que é chamada *energia potencial de Van der Waals*, onde x é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas.

- Ache a força de interação?
- Considerando que um dos átomos é muito pesado e permanece aproximadamente em repouso enquanto o outro se move em linha reta, descreva os possíveis movimentos analisando a curva de energia potencial.
- Ache o período para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. Considere m a massa do átomo mais leve.

8.12. Obtenha a expressão da integral dada por (8.62).

8.13. Estude sob o ponto de vista de curvas de potencial o movimento de uma partícula sujeita a uma força atrativa cuja energia potencial é dada por $E_p = -a/r^3$. Idem para $E_p = kr^2/2$ (considerar que o movimento seja bidimensional).

8.14. O conceito de forças conservativas é algo particular. De uma maneira geral, um campo vetorial é dito conservativo se

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0,$$

isto é, se a circulação de \vec{A} ao longo de uma linha fechada qualquer for zero. Como exemplo de campos vetoriais conservativos, além das forças já estudadas, temos o campo elétrico, o campo gravitacional e outros.

Similarmente ao que fizemos na Seção 8.2, temos que o campo conservativo \vec{A} pode ser escrito em termos de um campo escalar que é chamado genericamente de *potencial* (no caso particular de o campo vetorial ser a força, o campo escalar chama-se energia potencial). Assim, o potencial (que chamaremos genericamente de V) é definido por

$$\vec{A} = -\text{grad } V.$$

a) Obtenha a expressão do potencial gravitacional, considerando $V \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$.

b) Repita o cálculo do campo gravitacional para pontos dentro e fora de uma casca esférica de massa M e raio R , visto na Seção 3.3, calculando primeiramente o potencial gravitacional.

c) Idem para o caso do exercício 3.9.

8.15. Mostre que a frequência angular de vibração, para um sistema semelhante ao discutido na Figura 8.2, só que a partícula é agora vinculada a mover-se sobre um círculo de raio R , é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \left(1 + \frac{l}{R}\right)}.$$

Verifique que no caso particular de $R \rightarrow \infty$ temos o caso anteriormente discutido.

8.16. Uma partícula, sob pequenas oscilações, possui uma energia potencial dada por

$$U = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) - \alpha xy.$$

- a) Considerando m a massa da partícula, obtenha as equações de movimento.
b) Ache as frequências de vibração do sistema e interprete os resultados.

8.17. A Figura 8.22 representa dois pêndulos simples de massa m e comprimento l , acoplados por uma mola de constante elástica k . Esta mola é presa em cada pêndulo a uma distância h do ponto de suspensão. Para $\phi = \gamma = 0$ a mola não está esticada nem comprimida. Estudar as oscilações (pequenas) do sistema no plano vertical.

8.18. Seja o pêndulo invertido representado na Figura 8.23. A haste, onde é fixa a pequena massa m , é livre para se mover na extremidade O e sua massa é desprezível.

- a) Qual a condição que devem satisfazer os parâmetros a , b , k e m para que o equilíbrio seja estável?
b) Supondo satisfeita a condição precedente, calcule o período para pequenas oscilações.

Figura 8.22: Exercício 17.

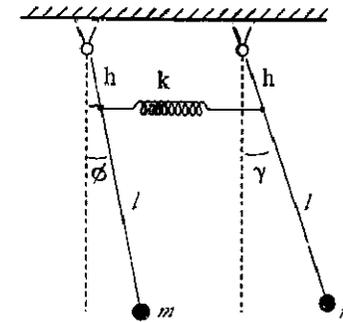
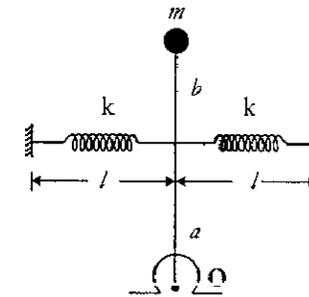


Figura 8.23: Exercício 18.



8.19. A energia potencial de interação entre os átomos de uma molécula de HCl é dada com boa aproximação pelo chamado *potencial de Morse*: $E_p(r) = D [1 - e^{-a(r-r_0)}]^2$, onde D , a e r_0 são três constantes positivas. r é a distância entre os dois átomos.

a) Esboce o gráfico da energia potencial. Qual é a distância do equilíbrio entre os átomos?

b) Qual é a frequência das pequenas oscilações da molécula? (Medidas espectrográficas mostram que essas frequências são da ordem de 10^{14} hz.)

c) Qual é o valor da ordem de grandeza da força de interação para $r - r_0 = 0,2$ (angstrom) ($1 = 10^{-10} m$)?

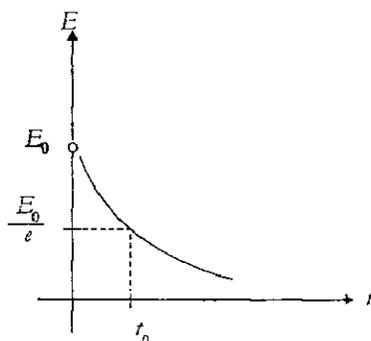
8.20. Considere no movimento subamortecido que $\gamma \ll \omega_0$. Mostre que, nesta aproximação, a energia mecânica é dada por $E \simeq \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}$, onde

E_0 é a energia mecânica do oscilador harmônico simples.

8.21. A energia de um oscilador subamortecido, considerando $\omega_0 \gg \gamma$, decai com o tempo aproximadamente de acordo com o gráfico da Figura 8.24. Supondo conhecidos E_0 , t_0 e a constante elástica k do oscilador, calcule:

- o coeficiente de amortecimento γ ;
- a amplitude do movimento no instante t_0 .

Figura 8.24: Exercício 21.



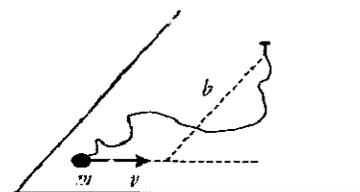
8.22. Prove que para as oscilações forçadas de um oscilador amortecido, a potência média da força aplicada é igual à potência média dissipada pela força amortecedora, na situação estacionária.

8.23. O vetor posição de um corpo possuindo 6 kg é dado (em metros) por $\vec{r}(t) = (3t^2 - 6t)\hat{i} - 4t^3\hat{j} + (3t + 2)\hat{k}$.

- Usando a definição de torque, calcule diretamente o torque que atua sobre o corpo.
- Faça o mesmo com o momento angular.
- Verifique a relação $\vec{\tau} = d\vec{l}/dt$.

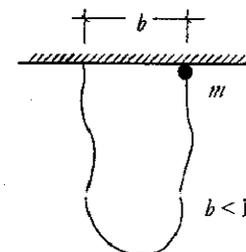
8.24*. Um corpo de massa m está ligado a um fio de massa desprezível e de comprimento L . A outra extremidade do fio está amarrada a um prego fixo em uma superfície plana sem atrito. O corpo possui uma velocidade inicial de módulo V e passa a uma distância b do prego ($b < L$) (veja Figura 8.25). Quando o corpo chega ao fim do fio, este permanece esticado e o corpo passa a se mover em trajetória circular. Qual será a velocidade angular do corpo? O movimento linear se conserva? E a energia mecânica?

Figura 8.25: Exercício 24.



8.25*. Um pequeno corpo de massa m é preso por um fio de massa desprezível e possuindo comprimento L . Este sistema está inicialmente disposto como indica a Figura 8.26. Em determinado instante o corpo é solto a partir do repouso. Supondo que após o fio esticar o movimento seja oscilatório, qual será o ângulo máximo que este pêndulo fará com a vertical?

Figura 8.26: Exercício 25.



8.26. Mostre que o vetor de Runge-Lenz é perpendicular ao vetor momento angular.

8.27. Partindo de (8.89) e (8.90), obtenha a relação (8.92).

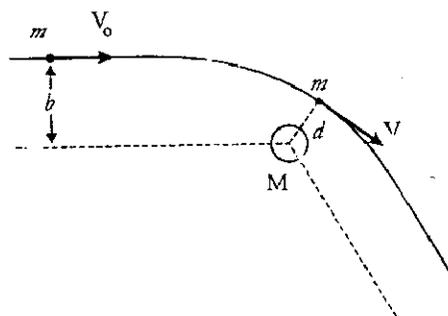
8.28. Obtenha (8.95).

8.29. Da relação (8.95), calcule a seção de choque total. Você deverá encontrar um resultado infinito. Qual é a interpretação disto?

8.20. Um cometa de massa m incide contra um planeta de massa M , descrevendo uma trajetória como a indicada na Figura 8.27. Considere $M \gg m$, tal que M pode ser considerado aproximadamente em repouso.

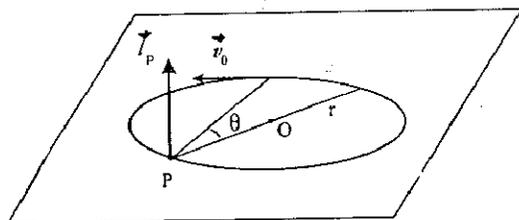
- a) Quais são as quantidades conservadas no movimento? Justifique.
- b) Considere que inicialmente o cometa esteja muito afastado do planeta, tal que a energia potencial gravitacional entre eles possa ser desprezada nesta posição. Calcule o módulo da velocidade \vec{V} do cometa no ponto de maior aproximação, bem como a distância deste ponto ao centro do planeta, em termos de b , V_0 , M e G .

Figura 8.27: Exercício 30.



- 8.31. Seja uma partícula num movimento circular uniforme. Calcule o momento angular em relação a um ponto qualquer P da circunferência (veja Figura 8.28). O momento angular é constante?

Figura 8.28: Exercício 31.



- 8.32. Faça o mesmo desenvolvimento para obtenção de (8.5), mas usando a expressão do momento relativístico [veja (6.21)]. Mostre que a energia cinética relativística é dada por

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Verifique se esta expressão leva à (8.5) para $v \ll c$. Observe ainda que na expressão relativística da energia cinética há a subtração de um termo, mc^2 , que corresponde a uma energia de repouso da partícula. Ou seja, relativisticamente, a uma partícula de massa m em repouso pode-se associar uma energia dada por mc^2 . Podemos, então, de uma maneira geral, incluindo a energia de repouso, dizer que uma partícula de massa m e velocidade \vec{v} possui uma energia dada por

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

8.33. Três partículas de mesma massa m estão vinculadas a se moverem sobre um círculo e presas uma às outras através de molas de constante k (veja Figura 8.29). Considere que na posição de equilíbrio as molas não estão esticadas nem comprimidas e que as distâncias entre as partículas sejam iguais.

- a) Mostre que a energia potencial do sistema é dada por

$$E_p = \frac{k}{2} [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2],$$

onde ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são deslocamentos das partículas 1, 2 e 3, respectivamente, em torno da posição de equilíbrio.

- b) Obtenha as equações diferenciais do movimento das partículas e as frequências normais de vibração do sistema.

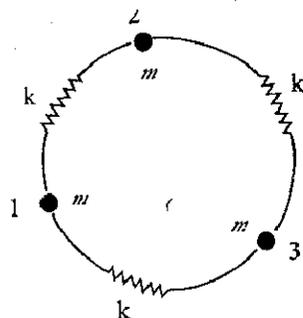
8.34. Um corpo de massa m move-se sob a ação de uma força central dada por $\vec{F} = -k\vec{r}$.

- a) Escreva as quantidades conservadas e explique por que se conservam.
- b) Faça um estudo qualitativo do movimento através das curvas de potencial.

8.35. Duas massas m_1 e m_2 , presas a uma mola, deslocam-se ao longo do eixo x . Considere que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam as posições das duas massas no instante t e que quando a distância entre elas é b a mola não está esticada nem comprimida.

- a) Escreva a energia potencial do sistema.
- b) Considere $x_1(t) = x_{10} + \xi_1(t)$ e $x_2(t) = x_{20} + \xi_2(t)$, onde x_{10} e x_{20} são posições de equilíbrio ($x_{20} - x_{10} = b$) e ξ_1 e ξ_2 são deslocamentos no entorno da posição de equilíbrio (não são, necessariamente, pequenos deslocamentos). Obtenha as equações de movimento para cada partícula em termos de ξ_1 e ξ_2 .

Figura 8.29: Exercício 33.



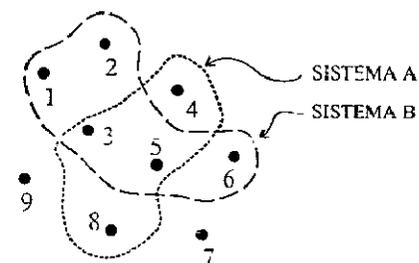
c) Obtenha as frequências próprias de vibração do sistema. Interprete o que significa cada resultado.

CAPÍTULO 9

Sistema de partículas

Um sistema de partículas nada mais é do que um conjunto de partículas que interagem entre si e externamente ao sistema. Este conceito é, de certa forma, um tanto subjetivo, pois as partículas que pertencerão ao sistema vão depender do nosso ponto de vista e, conseqüentemente, da conveniência do problema. Sejam, por exemplo, os dois sistemas especificados na Figura 9.1:

Figura 9.1: Exemplos de sistemas de partícula.



As partículas integrantes do sistema *A* são as de número 3, 4, 5 e 8. As interações entre elas são chamadas de *interações internas*. As interações destas partículas com o que está fora do sistema (no caso, as partículas 1, 2, 6, 7 e 9) são ditas, conseqüentemente, *interações externas*. Já no sistema *B*, as interações internas são entre as partículas 1, 2, 3, 5 e 6, e as externas são as interações destas com as partículas 4, 7, 8 e 9.

De uma maneira geral, a força resultante que atua sobre a partícula *i* de um sistema com *N* partículas é dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(e)}, \quad (9.1)$$

onde

- \vec{F}_i = força resultante que atua na partícula i ;
- $\vec{F}_i^{(e)}$ = parcela da força resultante devido às interações externas;
- \vec{F}_{ij} = força de interação entre as partículas i e j do sistema.

Temos ainda pela terceira lei de Newton que

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (9.2)$$

e, obviamente,

$$\vec{F}_{ii} = 0. \quad (9.3)$$

Nas seções a seguir, trataremos do momento linear, momento angular e energia de um sistema de partículas, bem como as condições para sua conservação.

9.1 Momento linear de um sistema de partículas

Esta quantidade é definida por

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i, \quad (9.4)$$

onde \vec{p}_i é o momento linear da partícula i . A relação acima pode ser reescrita de maneira mais conveniente e interessante

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad (9.5)$$

Definindo

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad (9.6)$$

que é chamada de *centro de massa* do sistema de partículas, e usando-a em (9.5), encontramos

$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}, \quad (9.7)$$

onde $M = \sum_i m_i$ é a massa total do sistema e \vec{v}_{CM} é a velocidade do seu centro de massa.

A relação (9.7) claramente nos diz que o momento linear do sistema de partículas é como se fosse o momento linear de uma única partícula de massa M (massa total do sistema), movendo-se com a velocidade do centro de massa.

Vejam agora quanto à condição para a conservação do momento linear do sistema de partículas. Derivando a expressão (9.4) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (9.8)$$

Como $d\vec{p}_i/dt$ é a força resultante que atua sobre a partícula i (segunda lei de Newton), temos, usando a relação (9.1),

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)}. \quad (9.9)$$

Mas o primeiro termo do lado direito de (9.9) é nulo em virtude de (9.2). Portanto,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}_{ext}, \quad (9.10)$$

onde \vec{F}_{ext} é a resultante das forças externas ao sistema. Como vemos, o momento linear do sistema de partículas será conservado se a resultante das forças externas ao sistema for nula.

Combinando (9.7) e (9.10), obtemos mais uma importante relação

$$\vec{F}_{ext} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}, \quad (9.11)$$

que possui aplicações muito interessantes. Ela nos diz que só as forças externas contribuem para o movimento do centro de massa do sistema. Ela nos diz, também, que o movimento de um sistema de partículas é tal que a força resultante, atuante no sistema, é igual à força atuante numa partícula de massa M (massa total do sistema) que se move com a aceleração do seu centro de massa.

Vamos discutir alguns exemplos. Seja inicialmente o movimento de um projétil. Suponhamos que num determinado instante o projétil exploda. Antes da explosão, não levando em conta a resistência do ar, temos

$$M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{W},$$

onde \vec{W} é o peso do projétil. Após a explosão, M e \vec{W} continuam os mesmos. Logo, a equação do centro de massa permanece inalterada, isto é, o centro de massa continua o seu movimento normalmente, independentemente da explosão do objeto (veja Figura 9.2). Isto é fácil de ser compreendido, pois a explosão é causada por forças internas e estas, de acordo com a relação (9.11), não afetam o movimento do centro de massa.

Figura 9.2: A explosão não afeta a trajetória do CM.



Como outro exemplo, consideremos um corpo de massa m que se move com velocidade \vec{v} horizontal. Ele atinge um bloco de massa M que se achava inicialmente em repouso sobre uma mesa, sem atrito. Após a colisão, o corpo de massa m fica preso no de massa M e o conjunto passa a se mover com velocidade \vec{V} (veja Figura 9.3). Vamos determinar esta velocidade em termos dos outros dados.

Tomemos o sistema como sendo constituído pelos corpos de massas m e M . As forças externas que atuam sobre ele são verticais (pesos e força normal exercida pela superfície sobre o bloco M). Assim, a componente horizontal do momento linear do sistema é conservada.

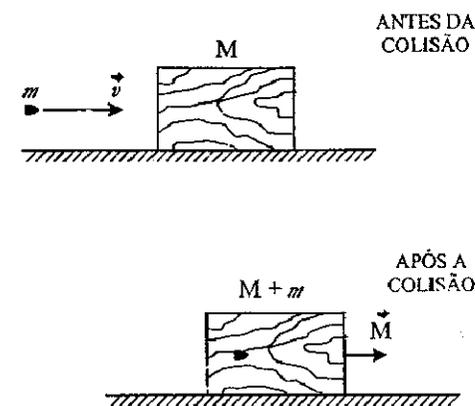
$$\begin{aligned} \vec{P}_x \text{ antes} &= m\vec{v}, \\ \vec{P}_x \text{ depois} &= (M + m)\vec{V}. \end{aligned}$$

Então,

$$m\vec{v} = (M + m)\vec{V} \Rightarrow \vec{V} = \frac{m}{M + m}\vec{v}.$$

Como já era de se esperar, a velocidade será tanto menor quanto maior for M . A energia mecânica se conserva? O que aconteceu?

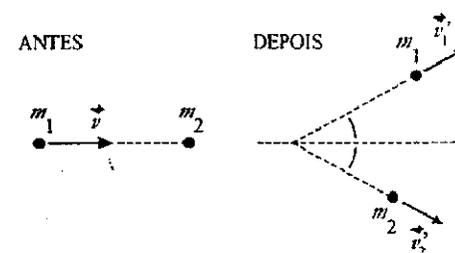
Figura 9.3: Colisão de um projétil com um bloco.



O exemplo acima é um problema de colisão. Neste tipo de problema, pode haver ou não a conservação da energia mecânica (no caso do exemplo, só cinética). Quando há conservação de energia cinética, a colisão é dita ser *elástica*.

Como último exemplo, consideremos uma pequena esfera de massa m_1 em repouso numa mesa. Sobre ela incide uma outra pequena esfera de massa m_2 e velocidade \vec{v}_2 . A Figura 9.4 mostra as situações antes e depois do choque (o qual estamos considerando como sendo elástico).

Figura 9.4: Colisão entre duas pequenas esferas.



Pela conservação do momento linear do sistema (constituído pelas duas

partículas), temos

$$m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \bar{\mathbf{v}}_1' + m_2 \bar{\mathbf{v}}_2'$$

Esta relação vale porque a resultante das forças externas que atuam sobre o sistema é nula (estamos desprezando o atrito entre as esferas e a mesa). Ela valeria mesmo se a colisão não fosse elástica. Mas, como a colisão é considerada elástica, temos ainda

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

O estudo da conservação da energia mecânica de um sistema de partículas será objeto da Seção 9.3. Entretanto, para o exemplo acima, a conservação da energia mecânica do sistema (no caso só cinética) é tão direta que não há necessidade de se esperar por esta seção para discuti-lo.

As duas equações anteriores (que na verdade são três pois a equação vetorial da conservação de momento dá duas equações) não são suficientes para resolver o problema, pois há quatro incógnitas. Esta situação seria agravada se o problema fosse tratado em três dimensões. Ai teríamos quatro equações envolvendo seis incógnitas. A explicação geral disto é fácil de ser entendida: Após a colisão, os ângulos de espalhamento são imprevisíveis. Para resolver o nosso problema bidimensional, teríamos de fixar um dos ângulos θ ou ϕ , mostrados na Figura 9.4.

Tomemos o caso unidimensional, onde o problema pode ser resolvido exatamente, porque temos duas equações e duas incógnitas. A resolução do sistema de equações fornece

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1,$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

O que acontece se $m_1 = m_2$? E se $m_1 \ll m_2$? E para $m_1 \gg m_2$? Mais uma pergunta: Como seria vista a colisão da Figura 9.4 (bidimensional) no referencial do centro de massa?

9.2 Momento angular de um sistema de partículas

O momento angular de um sistema de partículas é a soma dos momentos angulares de cada uma delas, tudo computado em relação a um mesmo ponto.

$$\bar{\mathbf{L}} = \sum_i \bar{\mathbf{l}}_i = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{p}}_i. \quad (9.12)$$

Vejam as condições para termos o momento angular do sistema conservado. Tomando a derivada de $\bar{\mathbf{L}}$ em relação ao tempo, vem

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \frac{d\bar{\mathbf{r}}_i}{dt} \times \bar{\mathbf{p}}_i + \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \frac{d\bar{\mathbf{p}}_i}{dt} = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \frac{d\bar{\mathbf{p}}_i}{dt}. \quad (9.13)$$

Pela segunda lei de Newton, $d\bar{\mathbf{p}}_i/dt$ é a força resultante que atua na partícula i (observe que sempre usamos as leis de Newton). Substituindo (9.1) na relação acima, obtemos

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij}. \quad (9.14)$$

O segundo termo do lado direito de (9.14) também é nulo. Vamos mostrar isto. Como i e j são simples índices de soma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \bar{\mathbf{r}}_j \times \bar{\mathbf{F}}_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (9.15)$$

pois $\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j$ possui a mesma direção de $\bar{\mathbf{F}}_{ij}$. Na segunda passagem acima, usamos que $\bar{\mathbf{F}}_{ij} = -\bar{\mathbf{F}}_{ji}$ (terceira lei de Newton). Com isto, a relação (9.14) fica dada simplesmente por

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_i^{(e)} = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i^{(e)} \times \bar{\mathbf{F}}_i^{(e)} = \bar{\mathbf{r}}_{\text{ext}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}}. \quad (9.16)$$

Como vemos, se o torque resultante das forças externas é nulo, o momento angular do sistema é conservado¹.

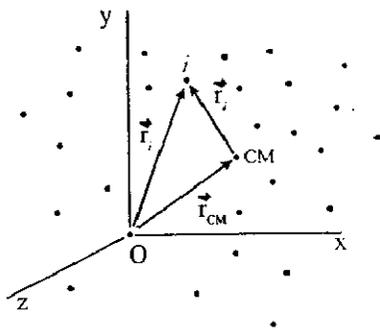
¹O torque resultante não é necessariamente o torque da força resultante. Procure você mesmo verificar isto.

Na seção anterior, vimos que o momento linear podia ser escrito como o produto da massa total do sistema com a velocidade do centro de massa (relação (9.7)). Procuremos obter agora uma relação semelhante para o momento angular. O vetor posição da partícula pode ser escrito como

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i, \quad (9.17)$$

onde \vec{r}'_i é o vetor posição da partícula i em relação ao centro de massa (veja Figura 9.5)

Figura 9.5: Posição da partícula i em termos da posição do CM.



Derivando (9.17) em relação ao tempo, encontramos

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i. \quad (9.18)$$

Substituindo (9.17) e (9.18) em (9.12), vem

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) \\ &= M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{v}'_i \\ &\quad - \vec{v}_{CM} \times \sum_i m_i \vec{r}'_i + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i. \end{aligned} \quad (9.19)$$

A quantidade $\sum_i m_i \vec{r}'_i$ é nula pois $\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}'_i$ é a posição do centro de massa em relação ao próprio centro de massa, ou seja, é um vetor nulo. Conseqüentemente, $\sum_i m_i \vec{v}'_i$ é nulo também. Assim,

$$\vec{L} = M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i. \quad (9.20)$$

A relação acima nos diz que o momento angular de um sistema de partículas, em relação a um ponto, é igual ao momento angular como se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa mais o momento angular em relação ao centro de massa. Adiantemos que no caso do corpo rígido (caso especial de um sistema de partículas que começaremos a estudar na seção seguinte), esta segunda parte será escrita em termos do chamado *momento de inércia*.

Na seção anterior, estudamos o momento linear de um sistema de partículas onde discutimos alguns exemplos. A seqüência natural seria fazer o mesmo em relação ao momento angular. Entretanto, muitos exemplos interessantes envolvendo a conservação do momento angular envolve também a conservação da energia mecânica. Aliás, isto já ocorreu num dos exemplos discutidos na subseção anterior. Vamos, então, antes de discutir qualquer outro exemplo, estudar com mais detalhes a energia mecânica de um sistema de partículas e as condições para sua conservação.

9.3 Energia mecânica de um sistema de partículas

Sigamos uma seqüência semelhante àquela desenvolvida para o caso de uma partícula (veja Seção 8.1). Consideremos inicialmente o trabalho realizado por todas as forças que atuam num sistema, desde uma certa configuração A até uma outra configuração B .

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i, \quad (9.21)$$

onde \vec{F}_i é a força resultante que atua na partícula i . Usando a segunda lei de Newton (como sempre), obtemos

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \sum_i m_i \int_A^B \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i m_i \int_A^B \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt \\ &= \sum_i m_i \frac{1}{2} \int_A^B \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) dt = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \Big|_A^B \\ &= E_{c,B} - E_{c,A}, \end{aligned} \quad (9.22)$$

onde,

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (9.23)$$

é a energia cinética do sistema de partículas.

A relação (9.22) é válida para qualquer que seja a natureza das forças que atuam sobre o sistema. No caso de essas forças serem conservativas, não é difícil concluir, seguindo o mesmo procedimento do capítulo anterior, que

$$W_{AB} = -\Delta E_{p,AB}, \quad (9.24)$$

onde E_p é a energia potencial do sistema de partículas e que possui a seguinte expressão geral

$$E_p = \sum_i E_{p,i}^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_{p,ii}. \quad (9.25)$$

A primeira parcela representa a energia potencial devido às interações externas e a segunda corresponde às interações internas (o fator meio vem do fato de o somatório estar contando duas vezes cada par de partículas). Combinando (9.22) e (9.24), obtemos que a energia mecânica do sistema de partículas é conservada quando só atuam forças conservativas. Vale aqui também o comentário mais amplo sobre a conservação de energia feito no capítulo anterior.

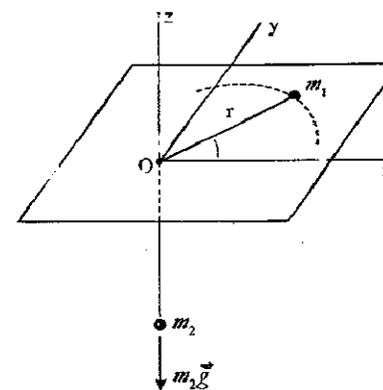
A exemplo do que fizemos com os momentos linear e angular, podemos expressar a energia cinética do sistema em termos das coordenadas do centro de massa. Combinando (9.18) e (9.23), encontramos

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i m_i \vec{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2, \end{aligned} \quad (9.26)$$

cuja interpretação é a mesma dos casos anteriores.

Como primeiro exemplo do que acabamos de ver, seja o caso de um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 , que está mostrado na Figura 9.6. A partícula m_1 move-se num plano sem atrito e está ligada à partícula m_2 por um fio inextensível de comprimento b . Consideremos desprezíveis outros

Figura 9.6: Exemplo de sistema de duas partículas.



possíveis atritos. Estudaremos este problema através das curvas de potencial (as integrais que aparecerão só podem ser resolvidas numericamente).

Em relação ao ponto O , o torque das forças externas é nulo. Portanto, em relação ao ponto O , o momento angular do sistema é conservado.

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = m_1 r^2 \dot{\theta} \hat{k} = \text{const.}$$

A energia mecânica também se conserva.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - m_2 g z \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 - m_2 g z \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 \dot{\theta}^2 + m_2 g r - m_2 g b \\ &= \text{constante}, \end{aligned}$$

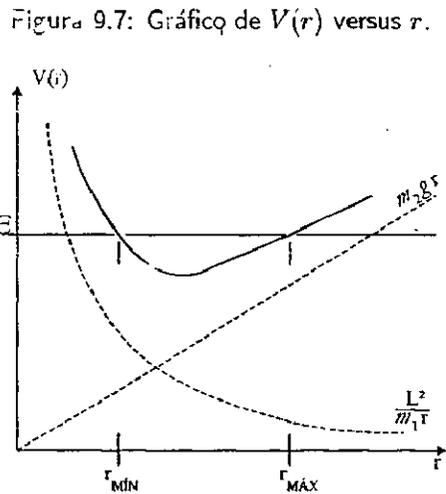
onde $z = b - r$. Eliminando a variável θ com o uso da expressão anterior, obtemos

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r,$$

onde $\tilde{E} = E + m_2 g b$, que também é constante. Façamos o gráfico de $V(r)$, dado por

$$V(r) = \frac{L^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r$$

versus r . O resultado encontra-se na Figura 9.7.



Como podemos observar, para valores da energia mecânica acima de um certo limite, o movimento se dá entre um valor máximo e um mínimo de r . Isto implica que o movimento de m_1 , num caso geral, está contido entre dois círculos (Figura 9.8). Veja bem, não está sendo afirmado que a trajetória seguida pelo corpo m_1 seja exatamente a da Figura 9.8. Só seria possível tal afirmação se conhecêssemos a equação da trajetória, o que não é o caso. A Figura 9.8 representa um esquema possível de trajetória, o qual está consistente com o que aprendemos sobre o problema.

Em virtude de o movimento de m_1 estar contido entre um $r_{máx}$ e um $r_{mín}$, temos que o movimento de m_2 estará contido entre um $z_{máx}$ e um $z_{mín}$. Ou seja, num caso geral, o corpo de massa m_2 sobe e desce!

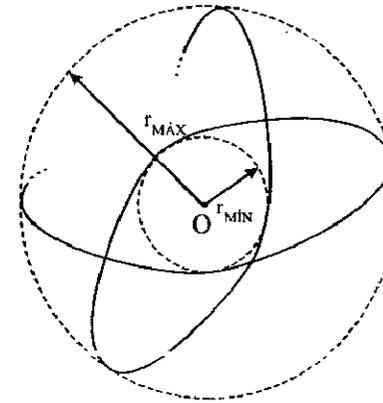
Como outro exemplo, consideremos o chamado problema da redução de dois a um corpo. Sejam duas partículas de massas m_1 e m_2 , interagindo entre si e constituindo um sistema isolado (as forças externa são desprezíveis) (veja Figura 9.9). Pela segunda lei de Newton, temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \\ \vec{F}_{21} &= m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}.\end{aligned}\quad (9.27)$$

Combinando estas duas relações, vem

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (9.28)$$

Figura 9.8: Possível trajetória do corpo m_1 .



Como $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$ e $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (terceira lei de Newton), podemos escrever

$$\vec{F}_{21} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (9.29)$$

onde

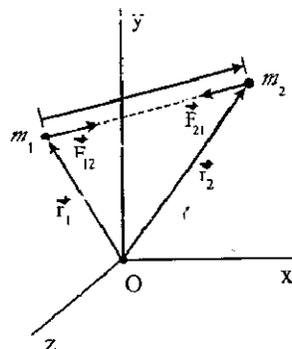
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9.30)$$

é a chamada *massa reduzida* do sistema das duas partículas².

A relação (9.29) expressa o importante e interessante aspecto de o problema de dois corpos poder ser tratado como o problema de um corpo apenas,

²O conceito de massa reduzida é restrito a duas partículas apenas.

Figura 9.9; Sistema isolado constituído por duas partículas.



possuindo massa μ dada por (9.30). Assim, para o estudo do movimento sob força central, feito no capítulo anterior, não haveria necessidade de termos considerado $M \gg m$. Todas as conclusões lá obtidas continuariam válidas, bastando trocar m por $\mu = \frac{mM}{m+M}$ (note que no caso de $M \gg m$, temos $\mu \simeq m$). Convém chamar a atenção de que \vec{r} é o vetor posição de um corpo em relação ao outro.

Pela expressão da definição do centro de massa, podemos diretamente concluir que [veja explicação após expressão (9.19)]

$$m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 = 0. \quad (9.31)$$

Como $\vec{r} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$, temos

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{r}'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Substituindo estas relações em (9.20) e (9.26), para o caso de duas partículas, encontramos

$$\vec{L} = M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \mu \vec{r} \times \vec{v}, \quad (9.33)$$

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \mu v^2, \quad (9.34)$$

onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. O momento linear não apresenta o termo $\mu \vec{v}$. Como o sistema que estamos estudando é considerado isolado, temos que \vec{v}_{CM} é constante. Assim, relativamente ao referencial do centro de massa ($\vec{v}_{CM} = 0$), que é inercial, as relações acima são reescritas simplesmente como

$$\vec{L}' = \mu \vec{r} \times \vec{v}, \quad (9.35)$$

$$E'_c = \frac{1}{2} \mu v^2. \quad (9.36)$$

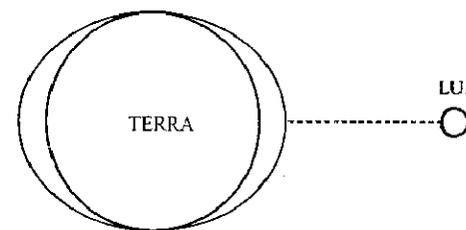
É bom frisar, mais uma vez, que este tipo de redução é uma característica apenas de sistemas isolados com duas partículas. Para sistemas de três corpos, por exemplo, não existe redução semelhante.

9.4 Mais alguns exemplos

9.4.1 A. As marés

O fenômeno das marés corresponde às protuberâncias da cinta oceânica devido à atração gravitacional da Lua. Uma destas protuberâncias fica localizada frente à Lua, o que é intuitivamente aceitável. Mas um tanto paradoxalmente, existe uma outra protuberância diametralmente oposta. Veja Figura 9.10.

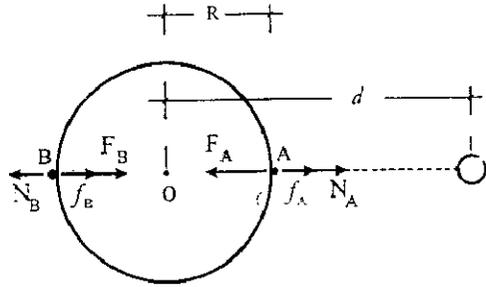
Figura 9.10: Fenômeno das marés.



Vamos agora passar a explicar este fenômeno. Sejam A e B duas partículas de massa m , situadas na superfície da Terra, uma em frente à Lua e outra diametralmente oposta (veja Figura 9.11).

As forças \vec{f}_A e \vec{f}_B são devidas à atração gravitacional da Lua. \vec{F}_A e \vec{F}_B devem-se à atração gravitacional da Terra. \vec{N}_A e \vec{N}_B são forças de contato. De acordo com a expressão da força gravitacional e pelos dados contidos na Figura 9.11, temos

Figura 9.11: Forças sobre pontos da superfície da Terra.



$$F_A = F_B = G \frac{mM_T}{R^2}, \quad (9.37)$$

$$f_A = G \frac{mM_L}{(d-R)^2}, \quad (9.38)$$

$$f_B = G \frac{mM_L}{(d+R)^2}. \quad (9.39)$$

Tanto a Terra como a Lua possuem um movimento de translação circular em torno do centro de massa do sistema. Todos os pontos da Terra descrevem trajetórias circulares de mesmo raio. A Figura 9.12 esclarece melhor o que foi dito (é importante frisar que o movimento não é como se a Terra e Lua constituíssem um halter rígido). Chamando de r o raio dessas trajetórias, temos, usando a segunda lei de Newton para as massas situadas nos pontos A e B,

$$G \frac{mM_L}{(d+R)^2} + G \frac{mM_T}{R^2} - N_B = m\omega^2 r, \quad (9.40)$$

$$N_A + G \frac{mM_L}{(d-R)^2} - G \frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 r. \quad (9.41)$$

Considerando o movimento da Terra em torno do CM, temos, também utilizando a segunda lei de Newton,

$$G \frac{M_T M_L}{d^2} = M_T \omega^2 r \Rightarrow \omega^2 r = G \frac{M_L}{d^2}. \quad (9.42)$$

Substituindo este resultado em (9.40) e (9.41), encontramos

$$G \frac{mM_L}{(d+R)^2} + G \frac{mM_T}{R^2} - N_B = G \frac{mM_L}{d^2}, \quad (9.43)$$

$$N_A + G \frac{mM_L}{(d-R)^2} - G \frac{mM_T}{R^2} = G \frac{mM_L}{d^2}. \quad (9.44)$$

Fazendo as seguintes aproximações (em virtude de $R \ll d$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(d+R)^2} &= \frac{1}{d^2} \left(1 + \frac{R}{d}\right)^{-2} \simeq \frac{1}{d^2} \left(1 - \frac{2R}{d}\right), \\ \frac{1}{(d-R)^2} &= \frac{1}{d^2} \left(1 - \frac{R}{d}\right)^{-2} \simeq \frac{1}{d^2} \left(1 + \frac{2R}{d}\right), \end{aligned} \quad (9.45)$$

e substituindo estes resultados em (9.43) e (9.44), vem

$$N_B = G \frac{mM_T}{R^2} - \frac{2R}{d} G \frac{mM_L}{d^2}, \quad (9.46)$$

$$N_A = G \frac{mM_T}{R^2} - \frac{2R}{d} G \frac{mM_L}{d^2}. \quad (9.47)$$

Como vemos, as forças de contato em A e B são iguais (e dirigidas para fora). Isto explica as protuberâncias aproximadamente iguais tanto em frente à Lua como na face diametralmente oposta.

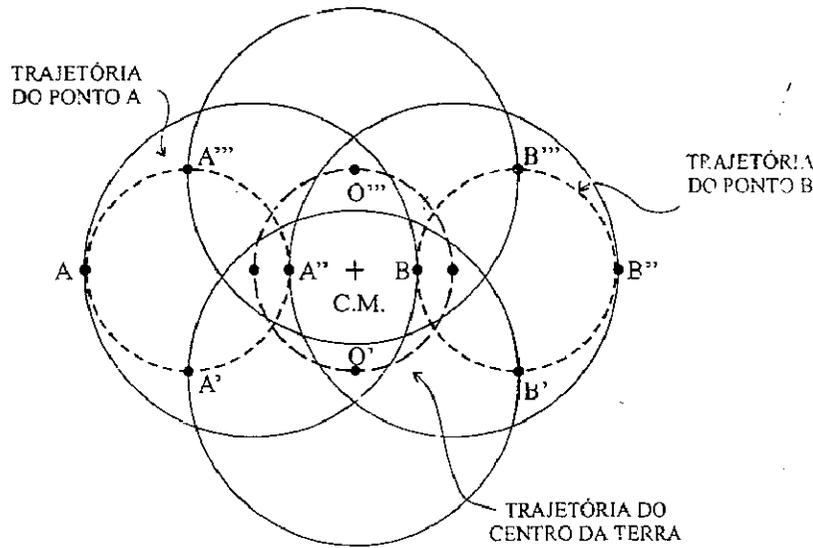
9.4.2 Foguetes (sistemas de massa variável)

Os foguetes são sistemas de massa variável em virtude da queima de combustível em suas câmaras. O escapamento veloz dos gases faz com que o foguete seja impulsionado em sentido contrário, numa aplicação direta da relação (9.11), pois, sendo emitidos gases num certo sentido, o foguete desloca-se em sentido oposto, a fim de que o centro de massa do sistema continue no seu trajeto normal.

Seja um foguete que, num certo instante t , possui massa M e está com velocidade \vec{V} . O momento linear do sistema no instante t é, então, dado por

$$\vec{P} = M\vec{V}. \quad (9.48)$$

Figura 9.12: Movimentos da Terra e da Lua em torno do C.M.



Após um intervalo de tempo dt , uma quantidade de massa dM é expelida, através de gases, em virtude da queima do combustível. Se não houver forças externas ao sistema, o momento linear continuará sendo \vec{P} . Nós, aqui, consideraremos que o foguete esteja se movendo no campo gravitacional terrestre, ou seja, a força externa é o peso do foguete. Chamando de \vec{P}' o momento linear do sistema no instante $t + dt$, temos (atente que dM é uma quantidade negativa)

$$\vec{P}' = (M + dM)(\vec{V} + d\vec{V}) + (-dM)\vec{V}', \quad (9.49)$$

onde \vec{V}' é a velocidade com que os gases são ejetados. Das relações (9.48) e (9.49), obtemos

$$d\vec{P} = \vec{P}' - \vec{P} = M d\vec{V} + dM(\vec{V} - \vec{V}') \quad (9.50)$$

Desprezamos a quantidade $dM d\vec{V}$ por ser um infinitésimo de ordem superior aos que aparecem em (9.50). O vetor $\vec{V}' - \vec{V}$ é a velocidade dos gases em relação ao próprio foguete, que chamaremos de \vec{V}_e . Fazendo esta substituição na relação (9.50) e dividindo ambos os lados por dt , obtemos

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{V}_e. \quad (9.51)$$

Como a força externa atuante no sistema é decorrente da interação gravitacional (desprezando a resistência do ar), temos

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{dM}{dt} \vec{V}_e = M \vec{g}. \quad (9.52)$$

Considerando o movimento na vertical e o eixo coordenado apontando para cima, podemos escrever

$$M \frac{dV}{dt} + \frac{dM}{dt} V_e = -Mg. \quad (9.53)$$

Vamos considerar que o foguete tenha partido do repouso, sendo M_0 a sua massa inicial, incluindo combustível. Considremos também que a altura atingida após a queima do combustível seja tal que o campo gravitacional não varia substancialmente em relação ao valor na superfície da Terra. Assim, da relação anterior, diretamente obtemos (tomando V_e constante)

$$V(t) = V_e \ln \frac{M_0}{M(t)} - gt. \quad (9.54)$$

Como exemplo, seja um foguete onde $V_e = 2000 \text{ m/s}$ e a perda de massa da ordem de $1/60$ da massa inicial do foguete por segundo (dados aproximados da V2). Qual deveria ser a razão entre as massas do combustível e do foguete vazio para que ele atingisse a velocidade de escape da Terra, que é aproximadamente 40000 km/h ou 11000 m/s ?

$$11000 = 2000 \ln \frac{M_0}{M} - 10 \frac{M_0 - M}{60 M_0}$$

$$2000 \ln \frac{M_0}{M} + 600 \frac{M}{M_0} = 11600,$$

onde, na primeira passagem, usamos que $\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{60} M_0$. O termo $600 \frac{M}{M_0}$ praticamente não contribui. Assim,

$$\frac{M_0}{M} \simeq 330.$$

Portanto, a razão entre a massa do combustível ($M_0 - M$) e do foguete vazio (M) é também desta ordem! Isto explica a adoção de foguetes com mais de um estágio em alguns casos.

► Exercícios

9.1*. Uma partícula de massa $m_1 = 3 \text{ kg}$ colide elasticamente com uma outra de massa $m_2 = 4 \text{ kg}$, inicialmente em repouso. A velocidade de m_1 é de 27 m/s . Após a colisão, m_2 move-se num ângulo de 45° com a direção original de m_1 . Encontre as velocidades finais de m_1 e m_2 . Analise também este problema no referencial do centro de massa. Repetir o problema considerando um ângulo de 30° em lugar de 45° .

9.2. Mostre que numa colisão elástica entre duas esferas idênticas, onde uma está inicialmente em repouso (o jogo de bilhar é um exemplo aproximado deste caso), o ângulo formado pelas direções das duas esferas após a colisão (se esta não for frontal) será sempre de 90° .

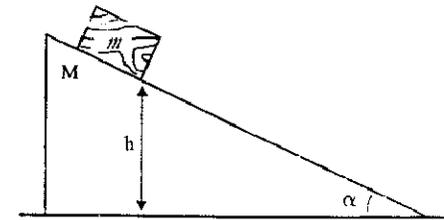
9.3. Dois patinadores A e B , cada um de massa M , estão num lago gelado. O atrito entre seus patins e o gelo é desprezível. O patinador A tem nas mãos uma bola de massa m . Ele a joga para B e este a devolve novamente para A . Sabendo que, quando estão em repouso, são capazes de atirar a bola com velocidade horizontal de módulo V (em relação ao solo) calcule a velocidade final de cada patinador.

9.4. Dois blocos A e B , de massas respectivamente iguais a $m_A = 70 \text{ kg}$ e $m_B = 20 \text{ kg}$, estão presos por uma mola. Estes corpos estão sobre uma mesa onde os atritos são desprezíveis. Separamos os dois corpos até uma distância de $2,0 \text{ m}$ e os soltamos. Em que ponto ocorrerá a colisão?

9.5*. Um corpo, caindo verticalmente em queda livre, explode em dois pedaços iguais quando está a uma altura de $2,000 \text{ m}$ e com uma velocidade de módulo 60 m/s . Imediatamente após a explosão, um dos fragmentos move-se para baixo com 80 m/s . Ache a posição do centro de massa 10 s após a explosão.

9.6*. Um bloco de massa m está inicialmente em repouso sobre uma cunha de massa M , a uma altura h , como mostra a Figura 9.13. Não há atrito em nenhum par de superfícies do problema. Calcule a velocidade final da cunha após o corpo atingir a base.

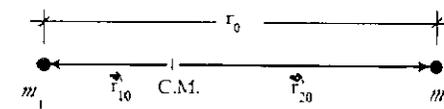
Figura 9.13: Exercício 6.



9.7*. Sejam duas partículas de massas m_1 e m_2 , afastadas de uma distância r_0 e em repouso nesta posição por um dispositivo qualquer não especificado no problema (veja Figura 9.14). Num determinado instante, o dispositivo que mantém as duas partículas em repouso é desativado. As partículas possuem apenas interação gravitacional.

- Em que ponto as partículas irão colidir? Explique.
- Expresse a conservação da energia considerando os movimentos em relação ao centro de massa.
- Escreva esta equação em relação a r e \dot{r} ($\vec{r} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$).
- Calcule o tempo que as partículas levam para se chocar.

Figura 9.14: Exercício 7.



9.8. Seja o mesmo problema anterior, considerando agora que um elástico de comprimento de repouso desprezível e constante k prende as partículas uma a outra. Considerando os corpos inicialmente afastados de uma distância d , calcule o tempo para haver colisão (despreze a interação gravitacional).

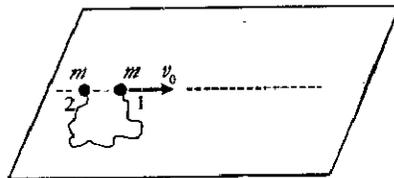
9.9. Sejam duas pequenas esferas de massas iguais a m , em repouso sobre uma mesa. Considere que as esferas sejam ligadas por um elástico de massa desprezível e constante elástica k . Dá-se uma velocidade inicial de módulo v_0 a uma das esferas (veja Figura 9.15). Descreva os movimentos das esferas. Despreze os atritos e suponha todos os movimentos numa única dimensão e que os (possíveis) choques entre elas sejam elásticos.

9.10. Um objeto de massa m e velocidade de módulo v colide com outro de massa $2m$ inicialmente em repouso (considere a colisão elástica).

a) Descreva o movimento inicial visto no referencial do centro de massa.

b) Se a velocidade da primeira partícula após a colisão for perpendicular à sua velocidade original, vista no referencial do centro de massa, encontre as direções das velocidades finais no sistema do laboratório.

Figura 9.15: Exercício 9.



9.11. Um conjunto de n massas está suspenso de modo a permanecer na mesma horizontal e sem entrar em contato uma com a outra (veja Figura 9.16). A primeira massa é $f m_0$, a segunda $f^2 m_0$, a terceira $f^3 m_0$ e assim até a última, que é $f^n m_0$. Sobre a primeira, incide uma partícula de massa m_0 que se move com velocidade horizontal de módulo v_0 . Esta produz uma sucessão de choques ao longo da linha de massas.

a) Considerando que todos os choques sejam perfeitamente elásticos, mostre que a última massa sai com velocidade igual

$$v_n = \left(\frac{2}{1+f} \right)^n v_0.$$

b) Mostre que se $f = 1$ toda a energia é transferida para a última massa.

c) Para $f = 0,9$ e $n = 20$, calcular a massa, velocidade e energia cinética da última massa da linha em função da massa, velocidade e energia cinética da partícula incidente. Compare este resultado com um choque direto entre a massa incidente e a última da linha.

9.12*. O sistema representado na Figura 9.17 está em repouso. O coeficiente de atrito entre a caixa (massa M) e o plano horizontal é μ . Largando-se o pêndulo (massa m) na posição indicada, qual deve ser o valor mínimo de μ para que a caixa não deslize? Descreva qualitativamente o movimento do sistema no caso em que $\mu = 0$.

Figura 9.16: Exercício 11.

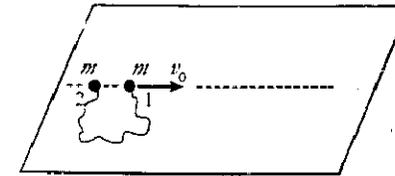
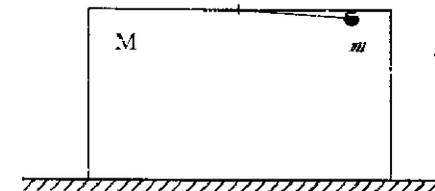


Figura 9.17: Exercício 12.



9.13*. Uma massa M , ligada à extremidade de uma corrente muito longa de massa m por unidade de comprimento, é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial de módulo V_0 . Mostre que a altura máxima atingida por M é

$$h = \frac{M}{m} \left[\left(1 + \frac{3mV_0^2}{2Mg} \right)^{1/3} - 1 \right]$$

e que a velocidade da massa M quando volta ao solo é $\sqrt{2gh}$.

9.14*. Um bola de massa m e velocidade de módulo V atinge um halter, inicialmente em repouso, como mostra a Figura 9.18. Considere a colisão perfeitamente elástica e que o corpo de massa m seja desviado de 30° em relação à sua direção inicial. Calcular, após a colisão, em termos dos dados do problema, a velocidade do corpo de massa m , a velocidade do CM do halter e a velocidade angular de rotação do halter em relação ao seu CM.

9.15. Sobre uma superfície plana horizontal, sem atrito, existe um corpo de massa m preso a um gancho de massa desprezível. Sobre este sistema, incide um outro corpo também de massa m de modo a atingir o gancho (veja Figura 9.19). Após a colisão, este último corpo fica preso ao gancho. Calcular a velocidade do centro de massa do sistema, bem como a velocidade angular em relação ao centro de massa.

Figura 9.18: Exercício 14.

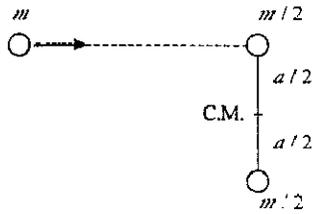
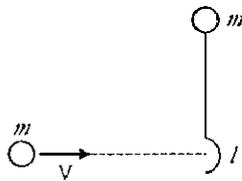
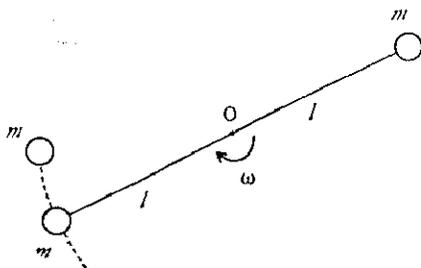


Figura 9.19: Exercício 15.



9.16. Um sistema de dois discos de massa m , ligados por uma haste rígida de massa desprezível e comprimento $2l$, gira com velocidade angular ω . O ponto O , no meio da haste, possui velocidade nula. Em certo instante, um dos discos colide com outro disco idêntico em repouso (veja Figura 9.20). O choque é totalmente inelástico. Qual é o movimento do ponto O depois do choque?

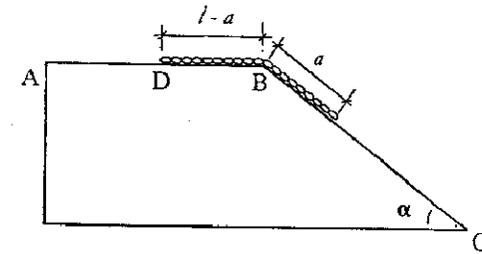
Figura 9.20: Exercício 16.



9.17. Um corrente flexível de comprimento l e peso W é colocada sobre uma

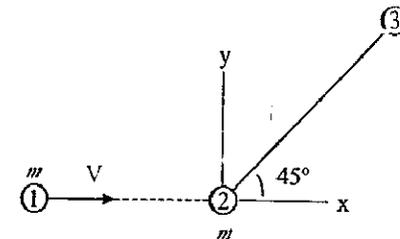
superfície sem atrito ABC (veja Figura 9.21). Inicialmente, a distância de B a D é $l - a$. Prove que a velocidade da corrente é $v = \sqrt{(g/l)(l^2 - a^2)} \sin \alpha$ quando a extremidade D atinge o ponto R .

Figura 9.21: Exercício 17.



9.18. Duas partículas (2 e 3) de massa m , ligadas por uma haste rígida de massa desprezível, estão inicialmente em repouso (veja Figura 9.22). A colisão entre 1 e 2 é totalmente inelástica e sistema movimenta-se sobre um plano horizontal sem atrito. Descreva o movimento do sistema após a colisão.

Figura 9.22: Exercício 18.

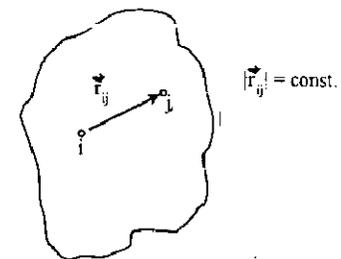


CAPÍTULO 10

Corpo rígido - Parte I

O corpo rígido é um caso especial de sistema de partículas, onde a distância entre duas partículas quaisquer do sistema permanece constante (veja Figura 10.1).

Figura 10.1: Corpo rígido.



As principais relações que iremos usar neste capítulo já foram deduzidas no capítulo anterior, mas não custa nada repeti-las (usaremos o índice a para representar as partículas do sistema)

$$\vec{p} = \sum_a m_a \vec{v}_a = M \vec{v}_{CM}. \quad (10.1)$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a \\ &= M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \sum_a m_a \vec{r}'_a \times \vec{v}'_a, \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a'^2. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Caso você tenha dúvidas na interpretação destas equações, bem como nas suas diversas conseqüências, convém estudar novamente o capítulo anterior (caso contrário, você deverá ter muitas outras dúvidas no que será aqui apresentado). A **Parte II** deste assunto será tratada no **Capítulo 13**.

10.1 Energia cinética e momento angular do corpo rígido

Seja um corpo rígido possuindo movimento de rotação em torno de um certo eixo, caracterizado por uma velocidade angular ω . Vamos calcular a energia cinética de rotação deste corpo. Veja Figura 10.2, onde m_a é a massa de uma partícula formadora do corpo rígido e d_a é sua distância ao eixo de rotação.

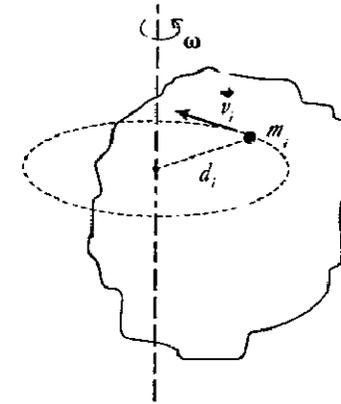
Já sabemos que a energia cinética é dada por

$$E_c = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2. \quad (10.6)$$

Mas, devido ao fato de estarmos lidando com um corpo rígido, todas as partículas possuem a mesma velocidade angular de rotação. Podemos então escrever

$$E_c = \sum_a \frac{1}{2} m_a \omega^2 d_a^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_a m_a d_a^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (10.7)$$

Figura 10.2: Corpo rígido girando em torno de um eixo.



onde a quantidade

$$I = \sum_a m_a d_a^2 \quad (10.8)$$

é chamada de *momento de inércia* do corpo rígido em relação ao eixo considerado.

Passemos agora ao cálculo do momento angular. Para tal, temos de escolher um ponto de referência. Seja então o ponto O (não necessariamente o CM), como mostra a Figura 10.3. O momento angular é dado por

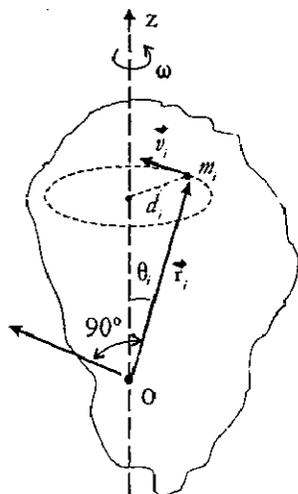
$$\vec{L} = \sum_a \vec{l}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a. \quad (10.9)$$

É fácil perceber que o vetor momento angular \vec{L} não é necessariamente paralelo ao eixo de rotação. Quando isto ocorre, o eixo é chamado de *eixo principal*.

Como a Figura 10.3 representa um caso geral e o eixo não é necessariamente principal, vamos calcular a projeção do vetor momento angular ao longo do eixo de rotação.

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_a l_a \cos(90^\circ - \theta_a) = \sum_a m_a r_a v_a \sin \theta_a \\ &= \sum_a m_a v_a d_a = \sum_a m_a d_a^2 \omega = I \omega, \end{aligned} \quad (10.10)$$

Figura 10.3: Momento angular do corpo rígido.

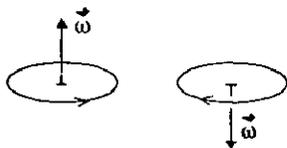


onde, na segunda passagem acima, usou-se o fato de \vec{r}_a e \vec{v}_a serem perpendiculares. Podemos escrever esta equação vetorialmente

$$\vec{L}_z = I_z \hat{k} = I \omega \hat{k} = I \vec{\omega}, \tag{10.11}$$

onde $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ é o vetor velocidade angular. Sua direção está ao longo do eixo de rotação e seu sentido depende do sentido da rotação. A Figura 10.4 esclarece este ponto (veja Capítulo 7, Sec. 3 - veremos mais detalhes no Capítulo 13).

Figura 10.4: Sentido do vetor velocidade angular.



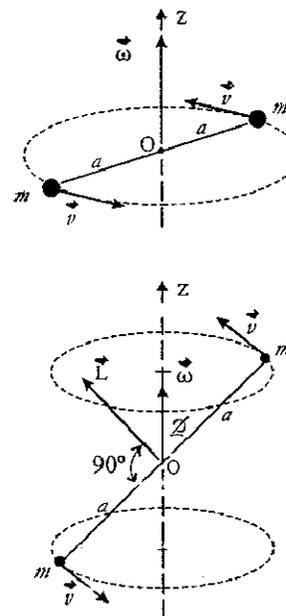
Vamos discutir um exemplo envolvendo um corpo rígido dos mais simples: duas pequenas bolas, de massa m cada uma, ligadas por uma haste de massa desprezível. Consideremos que este corpo rígido possua os movimentos de

rotação especificados na Figura 10.5. No primeiro caso, o eixo é principal (\vec{L} e $\vec{\omega}$ são paralelos). O momento angular vale

$$\vec{L} = 2mav \hat{k} = 2ma^2 \vec{\omega}. \tag{10.12}$$

A quantidade $2ma^2$ é o momento de inércia do sistema [veja Eq. (10.8)] em relação ao eixo z . O vetor momento angular \vec{L} é constante.

Figura 10.5: Exemplos de rotação de um corpo rígido.



No segundo caso, o eixo não é principal (\vec{L} e $\vec{\omega}$ não são paralelos). A componente do momento angular ao longo do eixo z é dada por

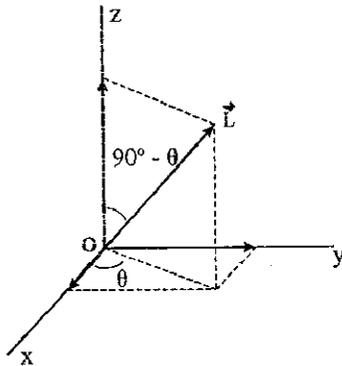
$$\vec{L}_z = 2ma^2 \text{sen}^2 \phi \vec{\omega}, \tag{10.13}$$

onde $2ma^2 \text{sen}^2 \phi$ é o momento de inércia relativamente ao eixo z . O vetor momento angular \vec{L} não é constante. Conforme as massas vão girando em torno do eixo z , o mesmo acontece com \vec{L} (este movimento do vetor \vec{L} é chamado de *precessão*). Como o momento angular total não é constante, temos que este movimento só é possível com o auxílio de um torque externo.

O valor deste torque é fácil de ser calculado através da relação (10.4) e com a ajuda da Figura 10.6.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= L \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \cos \theta \hat{i} + L \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) \operatorname{sen} \theta \hat{j} + L \cos(90^\circ - \phi) \hat{k} \\ &= L \cos \phi \cos \theta \hat{i} + L \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{j} + L \operatorname{sen} \phi \hat{k}.\end{aligned}\quad (10.14)$$

Figura 10.6: Decomposição do momento angular em eixos coordenados cartesianos.



Como L e ω são constantes e $\omega = d\theta/dt$, temos

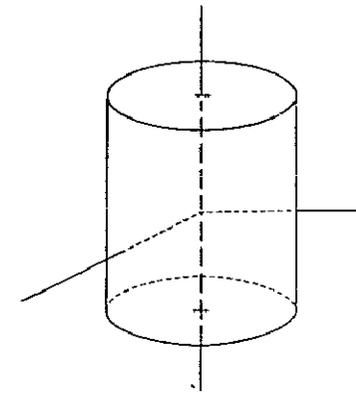
$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{\text{ext}} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = (-L \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{i} + L \cos \phi \cos \theta \hat{j}) \omega \\ &= L \omega \cos \phi (-\operatorname{sen} \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = L \omega \cos \phi \hat{\theta} \leftarrow \text{c.f. Exercício 1.5} \\ &= \frac{L_z}{\cos(90^\circ - \phi)} \omega \cos \phi \hat{\theta} = 2ma^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \omega^2 \hat{\theta} \\ &= ma^2 \omega^2 \operatorname{sen} 2\phi \hat{\theta}.\end{aligned}\quad (10.15)$$

Todo corpo rígido possui, em cada ponto, no mínimo três eixos principais, perpendiculares entre si (provaremos isto no Capítulo ??). Citemos também que quando o corpo rígido apresenta uma simetria de revolução, relativamente a um certo eixo, este eixo é principal (isto é diretamente percebido no primeiro caso do exemplo que discutimos ainda a pouco). Assim, por exemplo, o eixo de simetria de um cilindro é um eixo principal. Os outros eixos principais

são perpendiculares a ele, passando pelo centro do cilindro, como mostra a Figura 10.7.

Dentro deste raciocínio, temos que qualquer eixo que passa pelo centro de uma esfera é um eixo principal. Adiantemos que o mesmo acontece para o cubo.

Figura 10.7: Eixos principais de um cilindro.



10.2 Introdução à dinâmica do corpo rígido

Esta seção, assim como as próximas seguintes, consistirá de um estudo introdutório da dinâmica do corpo rígido. Maior profundidade neste assunto será apresentado a partir da Seção 5. Para o presente estudo, já possuímos toda a base teórica necessária, que está fundamentalmente nas relações (10.2) e (10.4). Como já é bem conhecido, estas relações originam-se da aplicação da segunda e da terceira leis de Newton.

O desenvolvimento da presente seção será feito com a discussão de alguns exemplos.

10.2.1 A. Máquina de Atwood

A máquina de Atwood foi-nos apresentada no exercício IV.11. Naquela oportunidade, desprezamos a massa da roldana (porque não sabíamos tratar do movimento do corpo rígido). Vamos estudar novamente a máquina de Atwood (veja Figura 10.8), mas levando em conta a massa da roldana. Consideraremos

desprezível o atrito entre a roldana e o eixo que passa pelo seu centro, mas não o atrito entre a roldana e o fio (pois, caso contrário, a roldana não giraria).

O isolamento dos corpos encontra-se na Figura 10.9. Usando a segunda lei de Newton, temos as equações

$$\begin{aligned} m_1 g - F &= m_1 a, \\ F' - m_2 g &= m_2 a, \\ T - F - F' &= 0. \end{aligned}$$

Figura 10.8: Máquina de Atwood.

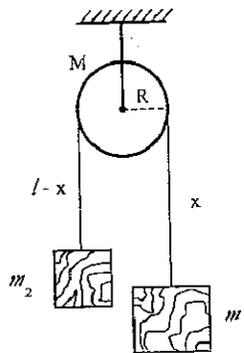
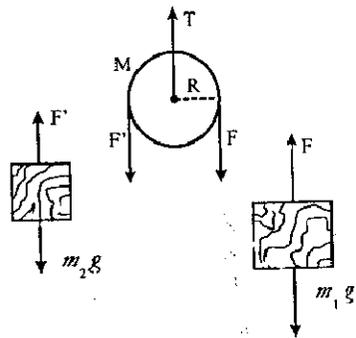


Figura 10.9: Isolamento dos corpos da máquina de Atwood.



A roldana só possui rotação em torno do eixo que passa pelo seu centro. Usando a expressão (10.4), obtemos

$$FR - F'R = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha,$$

onde $\alpha = d\omega/dt$ é a aceleração angular. Considerando a roldana aproximadamente como um disco ($I = MR^2/2$) (alguns momentos de inércia estão apresentados no exercício 3 - veja também exercícios 2 e 5) e supondo não haver deslizamento entre o fio e a roldana ($v = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$), obtemos

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g. \quad (10.16)$$

Comparando com o resultado do exercício 4.11, podemos observar que a aceleração é menor do que no caso de se desprezar a massa da roldana.

Poderíamos ter chegado a este mesmo resultado partindo da conservação da energia mecânica. Vejamos isto. As expressões das energias cinética e potencial são

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) v^2, \\ E_p &= -m_1 g x - m_2 g (l - x). \end{aligned}$$

onde l é uma constante relacionada com o comprimento do fio e considerou-se $E_p = 0$ no nível do eixo. Como é desprezado o atrito com o eixo da roldana, e os demais atritos só produzem rolamento perfeito, temos que a energia mecânica do sistema é uma constante. Assim, a derivada $E_c + E_p$ em relação ao tempo é zero. Isto nos leva a

$$\begin{aligned} \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) v \frac{dv}{dt} - (m_1 - m_2) g v &= 0, \\ \Rightarrow a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g, \end{aligned}$$

que é a mesma relação (10.16).

Já há algum tempo estamos falando que a força de atrito nos rolamentos perfeitos não realiza trabalho. Em outras palavras, não dissipa energia. Foi o que acabamos de utilizar acima. Vamos aproveitar a oportunidade para

fazer esta demonstração. Seja, por exemplo, uma roda sobre a qual aplicamos uma força \vec{F} . Consideremos que ela tenha um rolamento perfeito sobre uma superfície horizontal. Veja Figura 10.10, onde \vec{f}_a é a força de atrito (estático). De acordo com as relações (10.2), (10.4) e (10.11), encontramos

$$\begin{aligned} F - f_a &= M \frac{dv_{CM}}{dt}, \\ f_a R &= I \frac{d\omega}{dt}, \end{aligned} \quad (10.17)$$

onde I é o momento de inércia da roda em relação ao seu eixo de rotação. Vamos mostrar que só a força \vec{F} contribui para a variação da energia cinética (no caso, a energia potencial é constante).

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) \\ &= M v_{CM} \frac{dv_{CM}}{dt} + I \omega \frac{d\omega}{dt}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Combinando as relações (10.17) e (10.18), vem

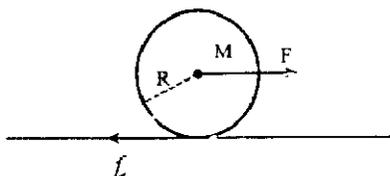
$$\frac{dE_c}{dt} = (F - f_a) v_{CM} + f_a \omega R. \quad (10.19)$$

No caso de rolamento perfeito, temos $v_{CM} = \omega R$. Portanto,

$$\frac{dE_c}{dt} = F v_{CM}, \quad (10.20)$$

que é o resultado esperado. Note que, realmente, a força de atrito não participa da variação da energia cinética!

Figura 10.10: Movimento de uma roda com rolamento perfeito.



10.2.2 Mecânica da bola de bilhar

Seja uma bola de bilhar de massa M e raio R (veja Figura 10.11). \vec{F} é a força que o taco exerce sobre a bola. Consideremos esta força tão intensa que, durante a tacada, a força de atrito entre as superfícies da bola e da mesa possa ser desprezada. Consideremos ainda que \vec{F} seja horizontal e aplicada na seção vertical que passa pelo centro da bola.

Durante a tacada temos, de acordo com as relações (10.2) e (10.4)

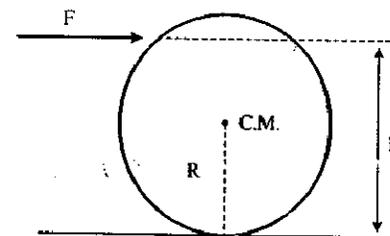
$$F = M \frac{dv_{CM}}{dt}, \quad (10.21)$$

$$F(h - R) = I_{CM} \frac{d\omega_{CM}}{dt} = \frac{2}{5} MR^2 \frac{d\omega_{CM}}{dt}, \quad (10.22)$$

onde ω_{CM} é a velocidade angular de rotação da bola em torno do centro de massa. Combinando essas duas equações, vem

$$\begin{aligned} M \frac{dv_{CM}}{dt} &= \frac{2MR^2}{5(h-R)} \frac{d\omega_{CM}}{dt} \\ \Rightarrow dv_{CM} &= \frac{2R^2}{5(h-R)} d\omega_{CM} \\ \Rightarrow \int_0^{v_{CM}} dv_{CM} &= \frac{2R^2}{5(h-R)} \int_0^{\omega_{CM}} d\omega_{CM} \\ \Rightarrow v_{CM} &= \frac{2}{5} \frac{R^2}{h-R} \omega_{CM}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Figura 10.11: Bola de bilhar no instante da tacada.



Na relação (10.23), v_{CM} e ω_{CM} são quantidades registradas durante a aplicação de \vec{F} . Note que, num caso geral, v_{CM} não é igual a $\omega_{CM}R$. Isto é, num

caso geral o rolamento é acompanhado de deslizamento. Se $h = R$, $\omega_{CM} = 0$ (não há rolamento). Se $h > R$, o rolamento é em sentido horário e se $h < R$, em sentido anti-horário. Podemos achar também o ponto onde a bola deve ser atingida para que o rolamento seja sem deslizamento. Para tal, introduzimos em (10.23) a condição $v_{CM} = \omega_{CM}R$, o que nos leva a

$$h = \frac{7}{5}R.$$

Consideremos agora a situação após cessar o efeito da força \vec{F} . Quando \vec{F} não estiver mais atuando, a força de atrito passa a ser significativa (pois é a única força horizontal que atua sobre a bola). Seja o caso de a bola ser atingida no centro. Como vimos, ela sai momentaneamente sem girar. Façamos este instante $t = 0$ e chamemos de \vec{v}_0 a velocidade do centro de massa. Assim, em $t = 0$ temos

$$v_{CM} = v_0 \quad \text{e} \quad \omega_{CM} = 0.$$

A Figura 10.12 mostra a situação num instante posterior genérico $t > 0$. A partir das relações (10.2) e (10.4) podemos diretamente escrever as equações

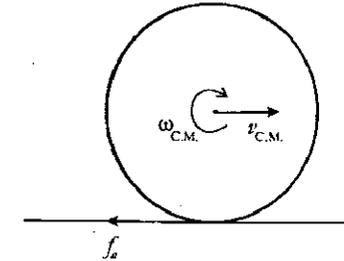
$$\begin{aligned} -f_a &= M \frac{dv_{CM}}{dt} \\ f_a R &= \frac{2}{5} MR^2 \frac{d\omega_{CM}}{dt}. \end{aligned}$$

O sinal relativo menos entre as duas relações acima deve-se aos efeitos contrários da força de atrito no tocante à rotação e à translação (ela retarda o deslocamento do centro de massa e acelera a rotação em torno do centro de massa). Combinando-as, vem

$$\begin{aligned} M \frac{dv_{CM}}{dt} &= -\frac{2}{5} MR \frac{d\omega_{CM}}{dt} \\ \Rightarrow \int_{v_0}^{v_{CM}} dv_{CM} &= -\frac{2}{5} R \int_0^{\omega_{CM}} d\omega_{CM} \\ \Rightarrow v_{CM} &= v_0 - \frac{2}{5} R \omega_{CM}. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Enquanto houver deslizamento, v_{CM} vai diminuindo e ω_{CM} vai aumentando. Eles continuam variando até o rolamento ser perfeito. A partir daí, passam a ser constantes. Não haverá mais a força de atrito. Substituindo $v_{CM} = \omega_{CM}R$

Figura 10.12: Movimento da bola de bilhar após a tacada.



na relação (10.24), obtemos a velocidade final do centro de massa em termos de v_0 , ou seja,

$$v_{CM} = \frac{5}{7}v_0.$$

A energia dissipada durante o deslizamento (trabalho realizado pela força de atrito) é facilmente obtida:

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv_0^2 - \frac{1}{2}M\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\left(\frac{5}{7}\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{7}Mv_0^2.$$

A título de ilustração, mostremos outra maneira de se obter a relação (10.24). Observando a Figura 10.12, notamos que para um ponto qualquer da superfície o torque é zero. Assim, em relação a este ponto, o momento angular é conservado. Usemos então a conservação do momento angular para as duas situações mostradas na Figura 10.13.

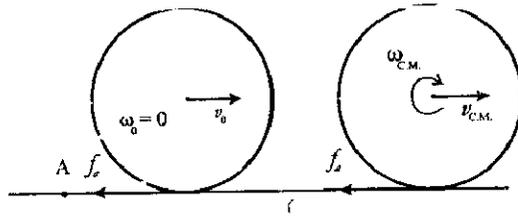
$$Mv_0R = Mv_{CM}R + \frac{2}{5}MR^2\omega_{CM} \Rightarrow v_{CM} = v_0 - \frac{2}{5}R\omega_{CM},$$

que é a relação (10.24).

10.3 Equilíbrio do corpo rígido (estática)

Consideremos que um certo corpo rígido esteja em equilíbrio num determinado instante. Isto significa que $\vec{r}_a = 0$, onde a está representando qualquer uma de suas partículas. Estamos interessados em saber quais as condições que devem ser satisfeitas para que ele fique em equilíbrio permanentemente. Não é

Figura 10.13: Movimento considerando o ponto A como referência.



difícil concluir que basta impedir que ele translade ou rode. Para que ele não translade, fazemos a resultante das forças que atuam sobre ele igual a zero. Para que ele não rode, fazemos o torque resultante, em relação a um ponto qualquer, também igual a zero. Estas duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente.

O estudo dos corpos em equilíbrio é um ramo da Mecânica chamado de *Estática*. Não vamos nos deter muito neste assunto. Limitar-nos-emos a discutir um exemplo e propor outros para serem resolvidos como exercícios.

Seja uma placa retangular de massa 100 kg , apoiada sobre uma parede como mostra a Figura 10.14 (todas as medidas de comprimento estão em metros). Ela está presa pelos fios e nos apoios C e D, sendo que em D o apoio é só na direção y . O nosso objetivo será calcular as forças de tensão nos fios e as forças nos apoios.

Aplicamos as condições de equilíbrio, isto é, a força e o torque resultante devem ser nulos. Começamos pelo torque. Para a componente x do torque resultante, obtemos

$$C_y = 0.$$

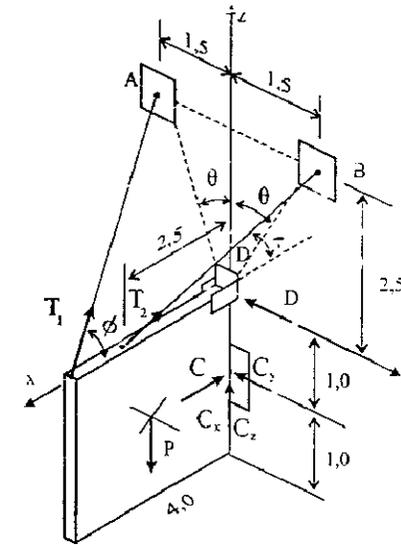
Para a componente z , temos

$$T_2 \sin \lambda \sin \theta \times 2,5 = T_1 \sin \phi \sin \theta \times 4.$$

Pelos dados da Figura 10.14, podemos obter diretamente que

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0,514, & \cos \theta &= 0,857, \\ \sin \lambda &= 0,759, & \cos \lambda &= 0,351, \\ \sin \phi &= 0,589, & \cos \phi &= 0,808. \end{aligned}$$

Figura 10.14: Placa apoiada sobre uma parede.



Usando estes dados na relação anterior, encontramos

$$T_2 = 1,24 T_1.$$

Em lugar de considerar a componente y do torque resultante, é mais conveniente tomar a projeção ao longo da linha que passa por AB . Assim,

$$3,5 C_x + 2P = 0 \Rightarrow C_x = -571\text{ N}.$$

O sinal negativo indica que C_x possui sentido contrário ao estabelecido na Figura 10.14.

Passemos agora para a condição de força resultante zero. Para a componente x , temos

$$T_1 \cos \phi + T_2 \cos \lambda + C_x = 0 \Rightarrow 0,808 T_1 + 0,651 T_2 = 571\text{ N}.$$

Usando a relação entre T_1 e T_2 , obtida acima, encontramos

$$T_1 = 354\text{ N} \quad \text{e} \quad T_2 = 439\text{ N}.$$

Tomando agora a componente y da resultante, temos

$$T_1 \sin \phi \sin \theta - T_2 \sin \lambda \sin \theta + D + C_y = 0 \Rightarrow D = 64,1 \text{ N}.$$

Para a componente z ,

$$P - C_z - T_1 \sin \phi \cos \theta - T_2 \sin \lambda \cos \theta = 0 \Rightarrow C_z = -364 \text{ N}.$$

Com este último resultado, calculamos C

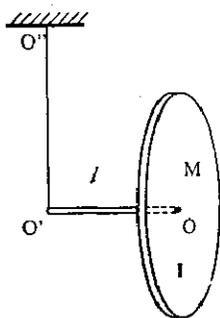
$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = 677 \text{ N}.$$

10.4 Introdução ao movimento do giroscópio

Qualquer corpo rígido com um eixo de simetria e rodando relativamente a este eixo constitui um giroscópio. Como exemplos imediatos de giroscópio temos a roda de bicicleta, o pião, a própria Terra etc.

O estudo do movimento do giroscópio, no caso geral, não é algo simples. Faremos um estudo mais aprofundado na Seção 7. Trataremos aqui apenas dos pontos mais simples. Seja então o dispositivo indicado na Figura 10.15.

Figura 10.15: Exemplo de giroscópio.



O sistema se encontra mantido na posição indicada por meio de uma agente externo qualquer (que não está sendo mostrado na figura). A roda de massa M e momento de inércia I (em relação ao eixo OO') possui liberdade para girar livremente em torno deste eixo. Consideremos que a massa da haste seja

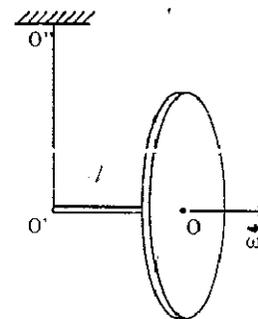
desprezível perante a massa da roda. Livrando o sistema do dispositivo que o mantém na posição indicada na figura, o movimento resultante será oscilatório no plano formado pela haste e pelo fio $O'O''$.

Consideremos agora a roda girando com velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno do eixo OO' , como mostra a Figura 10.16. Soltando o sistema e supondo que $\vec{\omega}$ seja suficientemente grande (falaremos daqui a pouco sobre o que vem a ser $\vec{\omega}$ suficientemente grande), ele não cairá como da vez anterior. Em lugar disso, ele passará a girar em torno do eixo vertical que passa por $O'O''$. Este movimento é chamado de *precessão*.

Vamos ver por que isto acontece. Em relação ao ponto O' , só o peso da roda contribui para o torque externo (lembre-se de que estamos desprezando o peso da haste). \vec{L} está dirigido ao longo da haste e, desprezando o atrito com o eixo, possui módulo constante. Por outro lado, como o eixo OO' é principal, podemos escrever

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (10.25)$$

Figura 10.16: Roda girando com velocidade $\vec{\omega}$.



O torque do peso em relação ao ponto O' [que é o $\vec{\tau}_{ext}$ da eq. (10.4)] faz \vec{L} variar em sentido como indica a linha pontilhada da Figura 10.17. O movimento é em torno do eixo vertical $O'O''$, com velocidade angular $\vec{\Omega}$. O cálculo do módulo de $\vec{\Omega}$ é diretamente obtido com a ajuda das relações (10.4) e (10.25). Como $\tau_{ext} = Mgl$, $|d\vec{L}| = L\Omega dt = I\omega\Omega dt$, obtemos

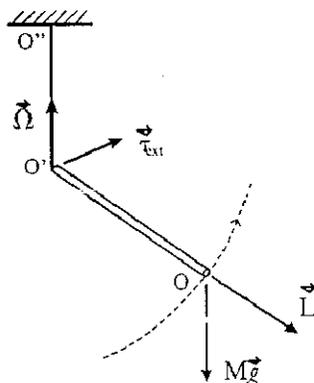
$$Mgl = I\omega\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{Mgl}{I\omega}. \quad (10.26)$$

O movimento de precessão é apenas uma aproximação, que só ocorre se $\vec{\omega}$ for

suficientemente grande (tal que possamos desprezar $\vec{\Omega}$ perante $\vec{\omega}$). A relação (10.26) mostra que quanto maior for $\vec{\omega}$ menor será $\vec{\Omega}$. Se $\vec{\Omega}$ não for desprezível em relação a $\vec{\omega}$ haverá, além da precessão, um outro movimento chamado *nutação*. Não vamos entrar em detalhes agora. Apenas adiantemos que a combinação da precessão e nutação pode acarretar um movimento como o esquematizado na Figura 10.18, onde a linha contínua representa o movimento do extremo da haste (ponto O).

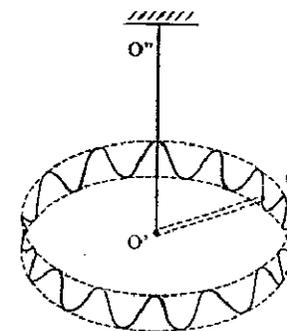
Um outro exemplo interessante corresponde ao movimento de um giroscópio sem torque externo. Veja a Figura 10.19, onde o sistema é suposto estar em equilíbrio. Consideremos que a haste AA' seja perfeitamente articulada no ponto O (isto é, tenha liberdade de movimento no entorno deste ponto) com atrito desprezível. Fazendo a roda girar, não haverá precessão (pois não havendo torque externo o momento angular não varia). Se mudarmos este dispositivo de posição (segurando na haste OB) o sentido de \vec{L} também não será alterado pois nenhum torque será introduzido no sistema.

Figura 10.17: Movimento de precessão do giroscópio.



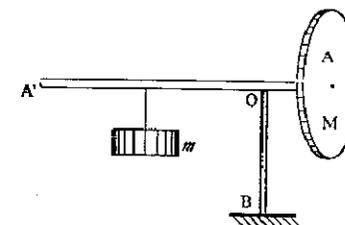
Dispositivos como estes são usados, por exemplo, na aviação para que o piloto tenha conhecimento da sua real posição em relação à Terra. Ele também serviria para comprovar o movimento de rotação da Terra. Neste caso, consideremos o giroscópio da Figura 10.19 colocado no equador com \vec{L} paralelo à superfície da Terra (posição 1 na Figura 10.20). Conforme a Terra vai girando, \vec{L} continua apontando na mesma direção (para um observador fora da Terra), pois não está havendo torque externo. Entretanto, para um observador girando com a Terra, o giroscópio é visto inclinando-se para baixo (veja a

Figura 10.18: Movimentos de precessão e nutação.



posição 2 da mesma figura). Seis horas depois, o giroscópio estará apontando verticalmente para baixo, em relação a um observador na Terra (posição 3).

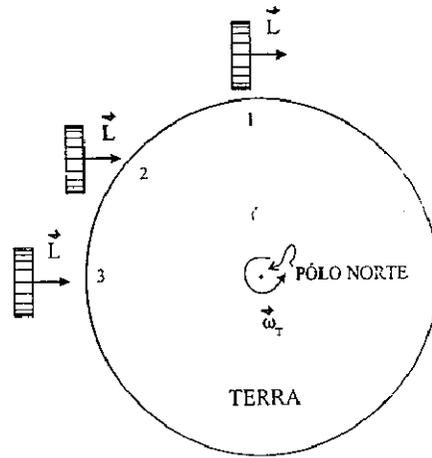
Figura 10.19: Movimento do giroscópio sem torque externo.



Foucault usou este mesmo princípio, embora com um dispositivo diferente, para provar a rotação da Terra. Ele considerou a variação do plano de um pêndulo simples. Você pode explicar, em linhas gerais, como Foucault concluiu que a Terra estava realmente girando? (Veja final da Seção 7.4.)

O que vimos até agora nesta seção foram alguns aspectos particulares do movimento do giroscópio, essencialmente concentrados no movimento de precessão. Nas seções seguintes, discutiremos este assunto um pouco mais criteriosamente. Para tal, precisaremos de alguns conhecimentos preliminares.

Figura 10.20: Giroscópio sem torque externo sobre a superfície da Terra.



10.5 Tensor de inércia

Na Seção 1 mostramos que a componente do momento angular de um corpo rígido ao longo do eixo de rotação é dada por $I\vec{\omega}$. Falamos, também, que quando \vec{L} e $\vec{\omega}$ são paralelos o eixo é dito *principal*, e que qualquer corpo rígido possui no mínimo três eixos principais. Vamos, agora, tratar deste assunto com um pouco mais de detalhes. Seja novamente o movimento do corpo rígido descrito pela Figura 10.3. O momento angular do corpo rígido em relação ao ponto O é dado por

$$\vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a. \quad (10.27)$$

Como, pela relação (7.28),

$$\vec{v}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}_a, \quad (10.28)$$

obtemos

$$\vec{L} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) = \sum_a m_a \left[r_a^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_a \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_a \right]. \quad (10.29)$$

Vamos escolher um certo sistema de eixos e expressar a relação (10.29) em termos das componentes dos vetores ao longo desses eixos. Assim,

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \sum_a m_a (r_a^2 - x_a^2) - \omega_y \sum_a m_a x_a y_a - \omega_z \sum_a m_a x_a z_a \\ L_y &= -\omega_x \sum_a m_a y_a x_a + \omega_y \sum_a m_a (r_a^2 - y_a^2) - \omega_z \sum_a m_a y_a z_a \\ L_z &= -\omega_x \sum_a m_a z_a x_a - \omega_y \sum_a m_a z_a y_a + \omega_z \sum_a m_a (r_a^2 - z_a^2). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Podemos escrever estas relações matricialmente como

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (10.31)$$

ou, simplesmente,

$$\vec{L} = I \vec{\omega}, \quad (10.32)$$

onde L , I e ω são as matrizes especificadas na relação (10.31). A matriz I é chamada de *matriz de inércia*. Os seus elementos

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_a m_a (r_a^2 - x_a^2) = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2), \\ I_{yy} &= \sum_a m_a (r_a^2 - y_a^2) = \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2), \\ I_{zz} &= \sum_a m_a (r_a^2 - z_a^2) = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2), \end{aligned} \quad (10.33)$$

são os conhecidos *momentos de inércia* em relação aos eixos x , y e z , respectivamente. Os demais elementos

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -\sum_a m_a x_a y_a, \\ I_{xz} &= I_{zx} = -\sum_a m_a x_a z_a, \\ I_{yz} &= I_{zy} = -\sum_a m_a y_a z_a, \end{aligned} \quad (10.34)$$

são chamados de *produtos de inércia*. De uma maneira geral, os nove elementos da matriz I , que podemos compactamente escrever

$$I_{ij} = \sum_a m_a [r_a^2 \delta_{ij} - x_i^a x_j^a] \quad (10.35)$$

(onde substituímos $x = x_1$, $y = x_2$ e $z = x_3$) constituem os nove elementos da matriz I foram um tensor, o chamado *tensor de inércia*. Vamos mostrar isto. Seja a relação (10.32). Relativamente a um sistema x' , y' e z' , deveremos ter

$$L' = I' \omega' \quad (10.36)$$

Como \vec{L} e $\vec{\omega}$ são vetores¹, podemos escrever

$$L' = AL \quad \text{e} \quad \omega' = A\omega, \quad (10.37)$$

onde A é a matriz de rotação que passa os vetores do sistema (x, y, z) para (x', y', z') . Substituindo (10.37) em (10.36), encontramos

$$AL = I' A\omega. \quad (10.38)$$

Multiplicando à esquerda por A^{-1} , vem

$$L = A^{-1} I' A\omega = \tilde{A} I' A\omega, \quad (10.39)$$

onde, na última passagem, usamos a condição de ortogonalidade da matriz A . Como observamos, comparando (10.32) e (10.39), a transformação para I deve ser

$$I = \tilde{A} I' A \Rightarrow I' = A I \tilde{A}. \quad (10.40)$$

Em termos de elementos de matriz, temos

$$I'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 A_{ik} I_{kl} \tilde{A}_{lj} = \sum_{k,l=1}^3 A_{ik} A_{jl} I_{kl}, \quad (10.41)$$

o que mostra, realmente, que o conjunto de elementos da matriz de inércia forma um tensor, o chamado *tensor de inércia* (veja Apêndice B).

A título de ilustração, mostremos uma outra maneira de obter a expressão da energia cinética. Diretamente, temos

¹Na verdade, são pseudovetores. Entretanto, nas rotações não existem diferenças entre vetores e pseudovetores (veremos detalhes no Capítulo 13).

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \sum_a \frac{1}{2} m_a (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_a). \quad (10.42)$$

Usando a conhecida identidade vetorial $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ (veja Apêndice B), temos

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a [\omega^2 r_a^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a)^2]. \quad (10.43)$$

Seja \hat{u} o unitário ao longo do eixo de rotação ($\vec{\omega} = \omega \hat{u}$). Assim,

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a [r_a^2 - (\hat{u} \cdot \vec{r}_a)^2] \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (10.44)$$

onde

$$I = \sum_a m_a [r_a^2 - (\hat{u} \cdot \vec{r}_a)^2] \quad (10.45)$$

é o momento de inércia em relação ao eixo de rotação. É importante atentar que a relação é válida para qualquer eixo e não apenas para os eixos principais, como já tínhamos visto na Seção 1.

Podemos escrever também T através do tensor de inércia. Partindo de (10.43), temos

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [\omega^2 r_a^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_a \sum_{ij} m_a [\omega_i \omega_j r_a^2 - \omega_i x_{ai} \omega_j x_{aj}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i \omega_j \sum_a m_a [r_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} I \omega. \end{aligned} \quad (10.46)$$

10.6 Matrizes de rotação e ângulos de Euler

Consideremos primeiramente o caso simples de rotação em torno de um dos eixos coordenados. Seja a rotação de um ângulo ϕ , no sentido anti-horário, em torno do eixo z . A Figura 10.21 mostra a situação descrita, onde \vec{V}_x e \vec{V}_y são componentes de um vetor \vec{V} nos eixos x e y . Escrevamos $\vec{V}_x + \vec{V}_y$ em termos dos unitários \hat{i}' e \hat{j}' , característicos dos eixos x' e y' , respectivamente,

$$\begin{aligned}\vec{V}_x + \vec{V}_y &= V_x \cos \phi \hat{i}' - V_x \sin \phi \hat{j}' + V_y \sin \phi \hat{i}' + V_y \cos \phi \hat{j}' \\ &= (V_x \cos \phi + V_y \sin \phi) \hat{i}' + (V_y \cos \phi - V_x \sin \phi) \hat{j}'.\end{aligned}\quad (10.47)$$

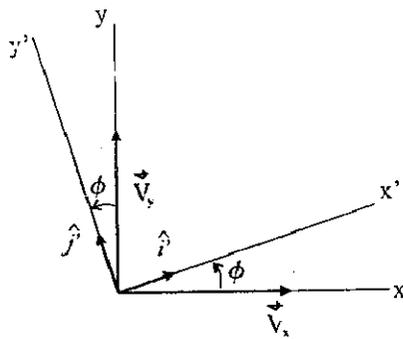
Portanto,

$$\begin{aligned}V_x' &= V_x \cos \phi + V_y \sin \phi, \\ V_y' &= -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi.\end{aligned}\quad (10.48)$$

Acrescentando que $V_z' = V_z$, podemos escrever este sistema matricialmente como

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}.\quad (10.49)$$

Figura 10.21: Rotação dos eixos x e y em torno do eixo z .



Assim, a matriz A que produz uma rotação ϕ no sentido anti-horário, em torno do eixo z , é dada por

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (10.50)$$

Não é difícil perceber como seria a forma das matrizes caso as rotações fossem em torno dos eixos x e y . Supondo rotações ϕ anti-horárias, teríamos, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}.\quad (10.51)$$

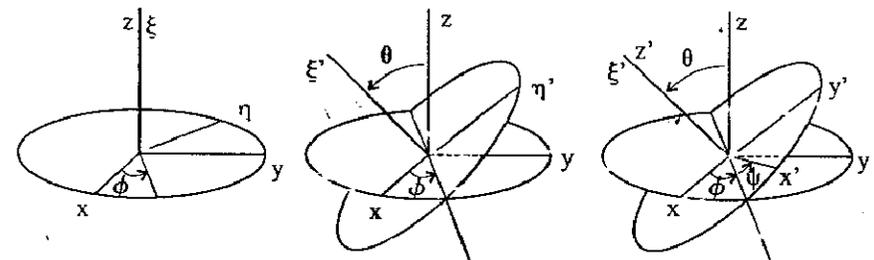
Um sistema de eixos pode ser colocado na forma mais geral possível através de três rotações sucessivas em torno de eixos particulares. Um exemplo de tais rotações está especificado na Figura 10.22 (todas as rotações são anti-horárias). Como podemos ver, primeiro é feita uma rotação ϕ em torno do eixo z , passando para o sistema (ξ, η, ζ) ; Depois, uma rotação θ em torno do eixo ξ , passando para o sistema (ξ', η', ζ') ; Finalmente, uma rotação ψ em torno do eixo ζ' , passando para o sistema (x', y', z') . Os ângulos ϕ , θ e ψ são os chamados *ângulos de Euler*. Denotaremos por $A(\phi)$, $B(\theta)$ e $C(\psi)$ as matrizes que produzem estas rotações.

Esquemáticamente, temos

$$(x, y, z) \xrightarrow{A(\phi)} (\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow{B(\theta)} (\xi', \eta', \zeta') \xrightarrow{C(\psi)} (x', y', z')$$

$\zeta = z$ $\xi' = \xi$ $z' = \zeta'$

Figura 10.22: Rotação geral dos eixos coordenados.



Observando (10.50) e (10.51), diretamente escrevemos as matrizes $A(\phi)$, $B(\theta)$ e $C(\psi)$

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ C(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.52)$$

A matriz geral de rotação, que chamaremos de R , é dada por

$$R = CBA,$$

ou, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (10.53)$$

Vejamos um exemplo onde aplicaremos matrizes de rotação para procurar os eixos principais de inércia. Neste ponto, a relação (10.40) desempenha um papel fundamental, pois podemos procurar uma transformação do sistema de eixos, dada por A , tal que I' seja diagonal. Teremos, assim, identificado os eixos principais do corpo rígido.

Seja um corpo rígido formado por duas placas retangulares e homogêneas, conforme mostra a Figura 10.23, onde cada placa possui massa M . Primeiramente, calculemos os momentos de inércia e produtos de inércia em relação aos eixos indicados. Usando as relações (10.33) e (10.34), obtemos

$$\begin{aligned} I_{xx} &= 2 \cdot \frac{M}{2a^2} \int_0^a \int_0^{2a} y^2 dx dy = \frac{2}{3} Ma^2, \\ I_{yy} &= 2 \cdot \frac{M}{2a^2} \int_0^a \int_0^{2a} x^2 dx dy = \frac{8}{3} Ma^2, \\ I_{zz} &= 2 \cdot \frac{M}{2a^2} \int_0^a \int_0^{2a} (x^2 + y^2) dx dy = 3 Ma^2, \\ I_{xy} &= -2 \cdot \frac{M}{2a^2} \int_0^a \int_0^{2a} xy dx dy = -Ma^2, \\ I_{xz} &= I_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (10.54)$$

A matriz de inércia é, então, dada por

$$I = Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Como vemos, os eixos x e y da Figura 10.23 não são principais (o eixo z é). Vamos procurar os eixos principais deste corpo rígido. Para este novo sistema de eixos, a matriz de inércia deverá ser diagonal. Usando as relações (10.40), (10.50) e (10.55), encontramos

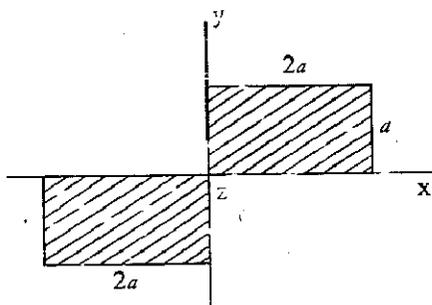
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{pmatrix} \\ &= Ma^2 \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cos^2 \phi + \frac{8}{3} \sin^2 \phi - \sin 2\phi & \sin 2\phi - \cos 2\phi & 0 \\ \sin 2\phi - \cos 2\phi & \frac{2}{3} \sin^2 \phi + \frac{8}{3} \cos^2 \phi + \sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.56)$$

Para que a matriz em (10.56) seja diagonal, deveremos ter,

$$\sin 2\phi = \cos 2\phi \Rightarrow \phi = 22,5^\circ. \quad (10.57)$$

Usando este resultado, temos que os momentos principais de inércia são dados por

Figura 10.23: Corpo rígido formado por duas placas.

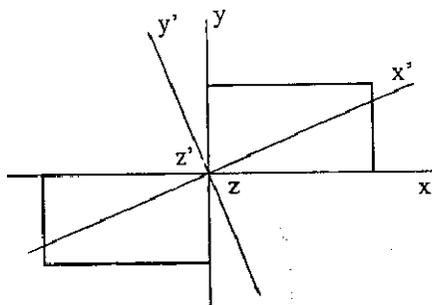


$$\begin{aligned} I'_{xx} &= 0,252 Ma^2, \\ I'_{yy} &= 3,08 Ma^2, \\ I'_{zz} &= 3 Ma^2. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Os eixos principais de inércia estão mostrados na Figura 10.24. A rotação em qualquer um destes novos eixos dará \vec{L} e $\vec{\omega}$ paralelos.

Se o problema não fosse bidimensional, seria melhor fazer a diagonalização pela resolução da equação de autovalores (isto será tratado no Capítulo 13).

Figura 10.24: Eixos principais de inércia.



10.7 Estudo mais aprofundado do movimento do giroscópio

Na Seção 4, vimos aspectos gerais do movimento do giroscópio, essencialmente concentrados no movimento de precessão. Na presente seção, discutiremos este assunto um pouco mais criteriosamente. Iniciaremos pela obtenção das chamadas *equações de Euler do movimento do corpo rígido*.

Seja então um corpo rígido movendo-se em torno de um ponto fixo². A dinâmica do movimento é dada pela equação (10.4). Consideremos as componentes do momento angular em relação a um sistema de eixos principais passando pelo ponto fixo. Podemos escrever então

$$\vec{L} = I'_1 \vec{\omega}_{x'} + I'_2 \vec{\omega}_{y'} + I'_3 \vec{\omega}_{z'}, \quad (10.59)$$

onde estamos chamando de I'_1 , I'_2 e I'_3 os momentos de inércia em relação aos eixos x' , y' e z' , respectivamente. Usando a relação (10.4), diretamente obtemos

$$\vec{\tau} = I'_1 \frac{d\vec{\omega}_{x'}}{dt} + I'_2 \frac{d\vec{\omega}_{y'}}{dt} + I'_3 \frac{d\vec{\omega}_{z'}}{dt}. \quad (10.60)$$

Acho bom chamar atenção para um detalhe. Estamos usando acima um sistema de eixos não fixos. Em relação a este sistema de eixos, que é principal, os momentos de inércia I'_1 , I'_2 e I'_3 são constantes (o que não aconteceria necessariamente se o sistema fosse fixo). Entretanto, referir o problema a este sistema de eixos não significa que estamos trabalhando num referencial não inercial (se estivéssemos, o corpo rígido estaria em repouso, $\vec{\omega} = 0$). O que estamos fazendo é, simplesmente, tomando as componentes de $\vec{\omega}$ em relação a este sistema de eixos (onde os unitários não são obviamente constantes). O torque externo é o mesmo ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ e $\vec{\tau}' = \vec{r}' \times \vec{F}$) pois $\vec{r}' = \vec{r}$.

Assim, como os unitários em x' , y' e z' não são constantes, temos

$$\frac{d\vec{\omega}_{x'}}{dt} = \frac{d\omega_{x'}}{dt} \hat{e}_{x'} + \omega_{x'} \frac{d\hat{e}_{x'}}{dt}. \quad (10.61)$$

Lembrando da relação (7.28), podemos escrever

$$\frac{d\vec{\omega}_{x'}}{dt} = \dot{\omega}_{x'} \hat{e}_{x'} + \omega_{x'} \vec{\omega}' \times \hat{e}_{x'}. \quad (10.62)$$

²Não trataremos do caso de movimento geral do corpo rígido onde um deslocamento, por mais geral que seja, pode sempre ser composto de uma rotação mais uma translação (teorema de Chasles). No caso do movimento do corpo rígido com um ponto fixo, um deslocamento geral pode sempre ser visto como uma rotação (teorema de Euler). Provaremos este teorema no Capítulo 13.

Relações análogas são obtidas para $d\vec{\omega}_{y'}/dt$ e $d\vec{\omega}_{z'}/dt$. Substituindo estes resultados em (10.60), vem

$$\vec{\tau} = I_1' \dot{\omega}_{x'} \hat{e}_{x'} + I_2' \dot{\omega}_{y'} \hat{e}_{y'} + I_3' \dot{\omega}_{z'} \hat{e}_{z'} + \vec{\omega} \times \vec{L}. \quad (10.63)$$

Escrevendo em componentes (ao longo dos eixos principais), temos

$$\begin{aligned} \tau_{x'} &= I_1' \dot{\omega}_{x'} + (I_3' - I_2') \omega_{z'} \omega_{y'}, \\ \tau_{y'} &= I_2' \dot{\omega}_{y'} + (I_1' - I_3') \omega_{x'} \omega_{z'}, \\ \tau_{z'} &= I_3' \dot{\omega}_{z'} + (I_2' - I_1') \omega_{y'} \omega_{x'}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Estas são as chamadas *equações de Euler* do movimento do corpo rígido (com um ponto fixo). Vamos fazer uma aplicação destas equações (outras serão deixadas como exercícios). Seja o movimento de um giroscópio sem torque externo. Consideremos z' o seu eixo de simetria. Conseqüentemente, $I_1' = I_2'$. Com estes dados, as equações de Euler ficam

$$\begin{aligned} I_1' \dot{\omega}_{x'} &= (I_1' - I_3') \omega_{y'} \omega_{z'}, \\ I_1' \dot{\omega}_{y'} &= -(I_1' - I_3') \omega_{x'} \omega_{z'}, \\ I_3' \dot{\omega}_{z'} &= 0. \end{aligned} \quad (10.65)$$

A última das equações (10.65) dá-nos que

$$\omega_{z'} = \text{constante}. \quad (10.66)$$

Combinando a primeira Eq. (10.65) com (10.66), obtemos

$$I_1' \dot{\omega}_{x'} = (I_1' - I_3') \dot{\omega}_{y'} \omega_{z'}. \quad (10.67)$$

Usando a segunda das equações (10.65) na relação acima, vem

$$\dot{\omega}_{x'} + \left(\frac{I_1' - I_3'}{I_1'} \omega_{z'} \right)^2 \omega_{x'} = 0, \quad (10.68)$$

cuja solução é (a menos de uma fase inicial)

$$\omega_{x'} = A \sin(\Omega t), \quad (10.69)$$

onde A é $\omega_{x'}$ máximo e

$$\Omega = \frac{I_1' - I_3'}{I_1'} \omega_{z'}. \quad (10.70)$$

Substituindo (10.69) na primeira relação (10.65), similarmente obtemos

$$\omega_{y'} = A \cos(\Omega t). \quad (10.71)$$

E a partir das relações (10.66), (10.69) e (10.71) vemos que ω é constante. De fato,

$$\omega^2 = \omega'^2 = \omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 + \omega_{z'}^2 = A^2 + \omega_{z'}^2. \quad (10.72)$$

É fácil então concluir que o movimento do corpo é tal que $\vec{\omega}$ precessa em torno do eixo de simetria z' com velocidade angular Ω , como mostra a Figura 10.25. As constantes A (amplitude de precessão) e $\omega_{z'}$ podem ser expressas em termos da energia cinética e momento angular (módulo), também constantes. Isto fica como um exercício.

A nossa Terra, achatada nos pólos e simetricamente dilatada no equador, forma um grande giroscópio. Como os torques externos que atuam sobre ela são tão fracos que podemos desprezá-los (numa primeira aproximação), temos que o estudo que acabamos de fazer pode ser aplicado ao seu movimento, isto é, ela deve possuir um certo movimento de precessão em torno de seu eixo de simetria. Vejamos isto quantitativamente. Tem-se para a Terra que

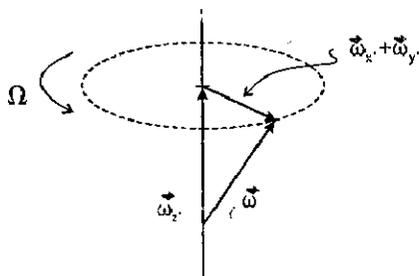
$$\frac{I_1' - I_3'}{I_1'} = -0,0033 \Rightarrow \Omega = \frac{\omega_{z'}}{300}, \quad (10.73)$$

onde $\omega_{z'}$ é aproximadamente igual ao ω da Terra, ou seja, 1 ciclo por dia. Assim, pela relação (10.73), o período de precessão deve ser de aproximadamente 300 dias.

Realmente, este movimento tem sido observado, só que com um período de 427 dias. A diferença para o resultado que calculamos se deve, principalmente, ao fato de a Terra não ser rigorosamente um corpo rígido. Este movimento não acarreta variações climáticas perceptíveis em virtude de sua pequena amplitude, que é cerca de 10 m.

A título de informação, adiantemos que a Terra possui outros movimentos. Um dos mais importantes (além, é claro, da rotação e translação) é a chamada *precessão dos equinócios*. A linha dos equinócios corresponde à interseção do plano equatorial com o plano da órbita terrestre em torno do Sol. O ângulo entre estes dois planos é de $23^\circ 27'$. O movimento de precessão da

Figura 10.25: Precessão em torno do eixo z' .



linha dos equinócios traz, como é fácil perceber, mudanças climáticas de grandes conseqüências para a Terra. Basta dizer que após meio período teríamos uma inversão das estações do ano. Imagine fazendo frio durante os meses de janeiro e fevereiro no hemisfério sul e calor no hemisfério norte. É claro que outros problemas ocorreriam, como o derretimento da calota polar etc. Felizmente, o período deste movimento é relativamente grande, da ordem de 28.000 anos! Ele se deve a um pequeno torque exercido pelo Sol e pela Lua sobre a Terra. Adiantemos, também, que a Terra, devido a este torque (isto ficará mais claro no exemplo que discutiremos a seguir), experimenta ainda um pequeno movimento de nutação com uma amplitude de $9,2''$ e com um período de 19 anos.

Não é muito simples o estudo destes movimentos para a Terra. Vamos finalizar esta seção discutindo um exemplo que contém, de certa forma, todos esses ingredientes e que servirá, também, para mostrar o grau de complexidade do movimento do corpo rígido. Vamos começar a estudar o movimento do pião (veja Figura 10.26). Um estudo mais aprofundado do movimento do pião será visto no Capítulo 13. As quantidades ϕ , θ e ψ são os ângulos de Euler, discutidas na seção anterior. O ângulo ϕ mede o movimento de precessão, θ o de nutação e ψ o de rotação em torno do eixo de simetria (movimento de *spin*). Os eixos x' , y' e z' são eixos principais.

Vamos primeiramente escrever $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ (componentes do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ ao longo dos eixos principais x' , y' e z') em termos dos ângulos de Euler. Começemos escrevendo $\vec{\omega}$ como

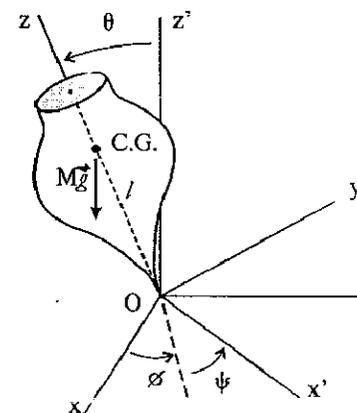
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\phi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi, \tag{10.74}$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_\phi &= \dot{\phi}, \\ \omega_\theta &= \dot{\theta}, \\ \omega_\psi &= \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{10.75}$$

Observamos que $\vec{\omega}_\phi$ é um vetor ao longo do eixo $z = \zeta$ (veja Figura 10.22). Para passarmos ao sistema x' , y' , z' temos de fazer duas rotações, dadas pelas matrizes B e C das (10.52), na ordem CB , isto é,

Figura 10.26: Movimento do pião.



$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \dot{\phi} \\ \sin \theta \cos \psi \dot{\phi} \\ \cos \theta \dot{\phi} \end{pmatrix}. \tag{10.76}$$

Vemos também que $\vec{\omega}_\theta$ é um vetor ao longo do eixo $\xi = \xi'$. Para passarmos ao sistema x' , y' , z' basta fazer uma rotação dada por C ,

$$\begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\theta} \\ -\sin \psi \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.77}$$

O vetor $\vec{\omega}_\psi$ já está no sistema x' , y' , z' . Então,

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= (\omega_\psi)_{x'} + (\omega_\theta)_{x'} + (\omega_\phi)_{x'} = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{y'} &= (\omega_\phi)_{y'} + (\omega_\theta)_{y'} + (\omega_\psi)_{y'} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{z'} &= (\omega_\phi)_{z'} + (\omega_\theta)_{z'} + (\omega_\psi)_{z'} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (10.78)$$

Poderíamos agora escrever as equações de Euler para o sistema. Obteríamos três equações diferenciais não lineares de segunda ordem, envolvendo os ângulos de Euler. É fácil perceber que estas soluções seriam de difícil solução. Vamos optar em partir das constantes do movimento. A energia total é uma delas

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \bar{\omega} I \omega + Mgl \cos \theta = \frac{1}{2} \bar{\omega}' I' \omega' + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I'_1 (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2} I'_3 \omega_{z'}^2 + Mgl \cos \theta.\end{aligned}\quad (10.79)$$

Chamemos novamente a atenção para o que já dissemos no início da seção. No primeiro termo acima para a energia cinética, $\frac{1}{2} \bar{\omega} I \omega$, a matriz de inércia é variável. Por isso, passamos para $\frac{1}{2} \bar{\omega}' I' \omega'$, onde a matriz de inércia é dada em termos de constantes. Entretanto, referir o problema a este sistema de eixos não significa que estamos trabalhando num referencial não inercial. Estamos, simplesmente, tomando as componentes de $\bar{\omega}$ em relação a este novo sistema de eixos (onde os unitários não são constantes). Note que o torque externo é o mesmo.

Substituindo (10.78) em (10.79), obteremos a expressão da energia total em termos dos ângulos de Euler

$$E = \frac{1}{2} I'_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I'_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta.\quad (10.80)$$

O torque é sempre perpendicular aos eixos z e z' . Logo, as componentes do momento angular ao longo destes eixos são constantes. Começemos escrevendo $L_{z'}$

$$L_{z'} = I'_3 \omega_{z'} = I'_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta).\quad (10.81)$$

Para obter L_z , partimos de \bar{L} escrito em termos das componentes ao longo dos eixos x' , y' , z' e fazemos rotações sucessivas até voltar ao sistema x , y , z , ou melhor, ao sistema ξ , η , ζ , pois $z = \zeta$ (veja Figura 10.22)

$$\begin{pmatrix} L_\xi \\ L_\eta \\ L_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_1 \omega_{x'} \\ I'_2 \omega_{y'} \\ I'_3 \omega_{z'} \end{pmatrix}.\quad (10.82)$$

Não vamos fazer toda a multiplicação matricial acima. Interessa-nos apenas obter L_z (que é igual a L_ζ)

$$L_z = \sin \theta \sin \psi I'_1 \omega_{x'} + \sin \theta \cos \psi I'_1 \omega_{y'} + \cos \theta I'_3 \omega_{z'}.\quad (10.83)$$

Substituindo (10.78) na relação acima, vem

$$L_z = (I'_1 \sin^2 \theta + I'_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I'_3 \cos \theta \dot{\psi}.\quad (10.84)$$

As constantes do movimento são dadas, portanto, pelas relações (10.80), (10.81) e (10.84). É fácil ver que a solução do problema fica a menos do cálculo de três integrais. Eliminando $\dot{\psi}$ entre (10.81) e (10.84), obtemos

$$\begin{aligned}(I'_1 \sin^2 \theta + I'_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + \cos \theta (L_{z'} - I'_3 \cos \theta \dot{\phi}) &= L_z \\ \Rightarrow I'_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + L_{z'} \cos \theta &= L_z \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= \frac{L_z - L_{z'} \cos \theta}{I'_1 \sin^2 \theta}.\end{aligned}\quad (10.85)$$

Substituindo este resultado em (10.80), vem

$$\begin{aligned}E' &= \frac{1}{2} I'_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I'_1 \sin^2 \theta \frac{(L_z - L_{z'} \cos \theta)^2}{I_1^2 \sin^4 \theta} + Mgl \cos \theta \\ \Rightarrow 2 I'_1 E' \sin^2 \theta &= I_1^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + (L_z - L_{z'} \cos \theta)^2 + 2 I'_1 Mgl \sin^2 \theta \cos \theta \\ \Rightarrow \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 &= \sin^2 \theta \left(\frac{2E'}{I_1} - \frac{2Mgl}{I_1} \cos \theta \right) - \frac{(L_z - L_{z'} \cos \theta)^2}{I_1^2},\end{aligned}\quad (10.86)$$

onde a constante E' foi definida como

$$E' = E - \frac{1}{2} I'_3 \omega_{z'}^2.\quad (10.87)$$

Fazendo a mesma substituição em (10.81), vem

$$L_z = I_3 \dot{\psi} + I_3 \cos \theta \frac{L_z - L_{z'} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L_{z'}}{I_3} - \cos \theta \frac{L_z - L_{z'} \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (10.88)$$

Definindo

$$\frac{2E'}{I_1} = \alpha, \quad \frac{2Mgl}{I_1} = \beta, \quad L_z = b I_1', \quad L_{z'} = a I_1', \quad (10.89)$$

obtemos para as relações (10.85), (10.86) e (10.88) que

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (10.90)$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1' a}{I_3} - (b - a \cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (10.91)$$

$$\sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = (\alpha - \beta \cos \theta) \sin^2 \theta - (b - a \cos \theta)^2. \quad (10.92)$$

Esta última relação fornece

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{\sin \theta d\theta}{\left[(\alpha - \beta \cos \theta) \sin^2 \theta - (b - a \cos \theta)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (10.92)$$

Resolvendo a integral acima (que não é simples, pois trata-se de uma integral elíptica), obteremos $\theta(t)$. Substituindo este resultado em (10.90) e (10.91), obteremos integrais para o cálculo de $\phi(t)$ e $\psi(t)$.

Como disse, resolver a integral (10.93) não é algo simples. Vamos optar por analisar o problema através das curvas de potencial. Para tal, substituamos $\cos \theta = u$ na relação (10.92).

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - a u)^2. \quad (10.94)$$

Seja a função

$$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - a u)^2. \quad (10.95)$$

Vamos esboçar um gráfico desta função. Particularmente, temos que

$$u \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(u) \rightarrow \pm\infty (\beta > 0)$$

$$u = \pm 1 \Rightarrow f(u) = -(b \mp a)^2 \leq 0.$$

Então, uma possibilidade para o gráfico de $f(u)$ versus u está mostrado na Figura 10.27. Outras possibilidades estão especificadas na Figs. X.28-30.

Figura 10.27: 3 raízes reais e distintas.

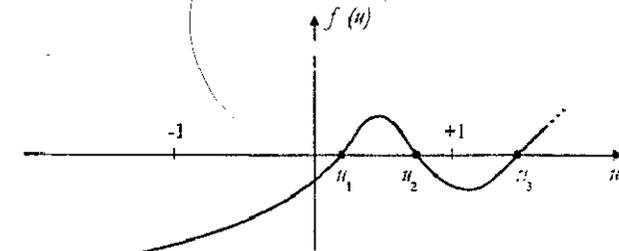
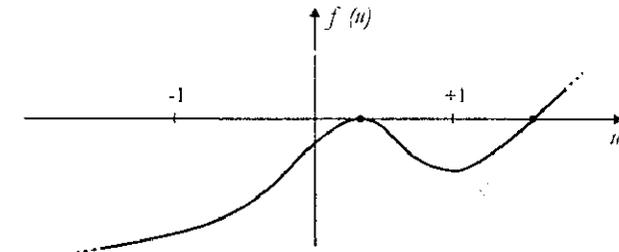


Figura 10.28: Três raízes reais sendo duas iguais.



Consideremos o caso da Figura 10.27. Como $u = \cos \theta$, o movimento só é possível para valores de u compreendidos entre ± 1 . Como também $\dot{u}^2 \geq 0$, o movimento ficará restrito entre u_1 e u_2 ($\theta_1 = \arccos u_1$ e $\theta_2 = \arccos u_2$). Isto faz-nos concluir que o eixo de simetria z' possui um movimento de vai-e-vem em relação ao eixo vertical z , que é a nutação.

O movimento de precessão é dado por (10.90). Há três situações possíveis:

(i) $b > a \cos \theta$ para todos os valores de θ compreendidos entre θ_1 e θ_2 . Neste caso, $\dot{\phi} > 0$ sempre e haverá um movimento do tipo mostrado na Figura 10.31.

Figura 10.29: Uma raiz real e duas complexas.

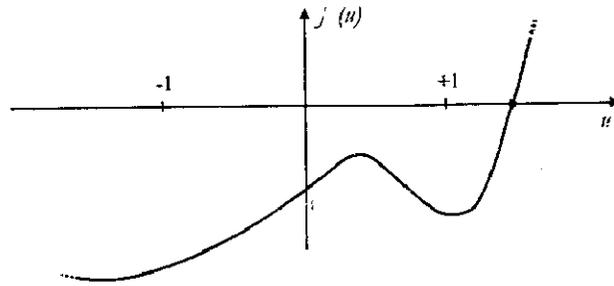
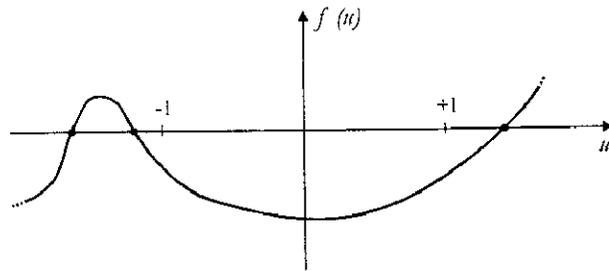


Figura 10.30: Outra possibilidade com três raízes reais e distintas.



A linha sinuosa da figura representa a interseção entre o eixo do pião e uma esfera de centro no ponto fixo. Esta linha é chamada de *locus*.

O resultado que acabamos de obter continua válido também para $b < a \cos \theta$. Só que neste caso a precessão seria em sentido contrário. Vemos também que $\dot{\theta} = 0$ em $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ (isto ocorre também nas situações abaixo)

(ii) Pode acontecer de $b > a \cos \theta_2$ e $b < a \cos \theta_1$ (ou vice-versa - veja o que foi dito no último parágrafo do item anterior). Neste caso, $\dot{\phi}$ é positivo para certos valores de θ e negativo para outros. O *locus* para estas condições está especificado na Figura 10.32.

(iii) Se $b = a \cos \theta_2$, teremos no ponto superior $\dot{\phi} = 0$. O *locus* do movimento é então dado pela Figura 10.33.

As Figs 10.29 e 10.30 não correspondem a nenhum movimento. Por quê? O caso da Figura 10.28 (bem como outros) serão propostos como exercícios.

Figura 10.31: Movimento de precessão e nutação - 1º caso.

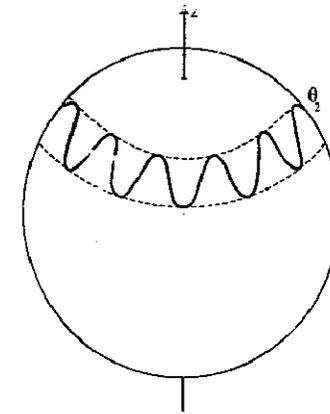
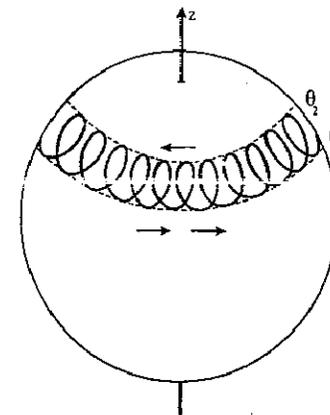


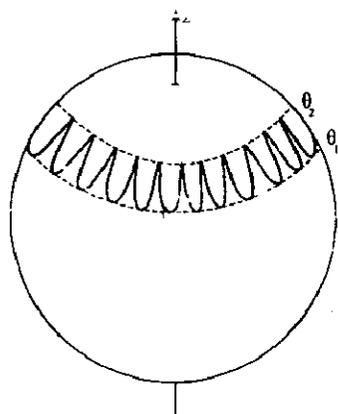
Figura 10.32: Movimento de precessão e nutação - 2º caso.



► Exercícios

10.1*. Calcule o momento de inércia de uma haste de comprimento l e massa m em relação a um eixo perpendicular à haste e passando pelo seu centro. Calcule também o momento de inércia da haste em relação a um eixo perpendicular à haste e passando pela extremidade.

Figura 10.33: Movimento de precessão e nutação - 3º caso.



10.2*. Mostre que $I = I_{CM} + Ma^2$, onde I_{CM} é o momento de inércia de um corpo de massa M em relação a um eixo passando pelo centro de massa. I é o momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao primeiro e distando deste de a . Este resultado é conhecido como *teorema dos eixos paralelos* ou *teorema de Steiner*. Verifique a aplicação deste teorema no caso do exercício anterior.

10.3. Mostre os valores dos momentos de inércia dos corpos da Figura 10.34, todos de massa M , em relação aos eixos indicados.

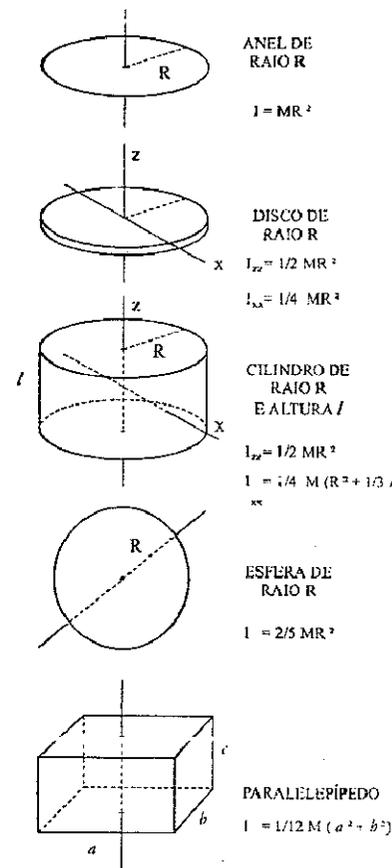
10.4*. Uma esfera de raio R é suspensa por um fio a partir de um ponto fixo, tal que a distância do centro da esfera ao ponto de suspensão vale l . Ache o período do pêndulo para pequenas oscilações. Mostre que para $R \ll l$, o resultado encontrado tende ao conhecido caso do pêndulo simples.

10.5. Seja um corpo plano de espessura desprezível (veja Figura 10.35). O eixo z é um eixo perpendicular ao plano. Os eixos x e y estão neste plano e são perpendiculares entre si). Mostre que $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$. Este resultado é conhecido como *teorema dos eixos perpendiculares*.

10.6. Imagine um cilindro maciço ligado a uma mola horizontal de massa nula. O cilindro pode rolar sem deslizamento sobre a superfície (veja Figura 10.36). A constante elástica da mola é $k = 3 Nm^{-1}$. Desloca-se o cilindro até a posição em que a mola se alonga de $0,25m$ e solta-se-o em seguida.

a) Calcular as energias cinéticas de rotação e translação do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

Figura 10.24: Exercício 3.



b) Mostrar que, nessas condições, o CM do cilindro executa um movimento harmônico simples cujo período é dado por $2\pi\sqrt{3m/2k}$.

10.7. Uma barra uniforme de comprimento l e massa m pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que passa pelo ponto A , situado a uma distância b de seu CM (veja Figura 10.37). Deslocando-se a barra de um pequeno ângulo θ_0 , relativo à posição de equilíbrio ($\theta = 0$), e abandonando-o nesta posição no instante $t = 0$, pede-se:

- a) a equação diferencial do movimento da barra;
- b) a solução $\theta(t)$ desta equação que satisfaça às condições iniciais do problema;

Figura 10.35: Exercício 5.

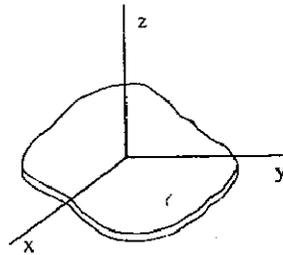
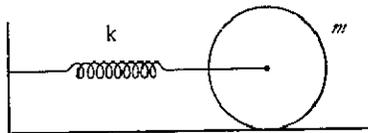
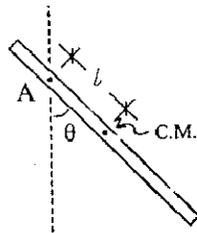


Figura 10.36: Exercício 6.



c) o período de oscilação da barra.

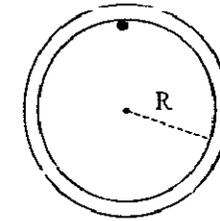
Figura 10.37: Exercício 7.



10.8. Um anel de raio R é suspenso como mostra a Figura 10.38. Calcular o período para pequenas oscilações.

10.9. O sistema representado no primeiro exemplo da Figura 10.39 está inicialmente girando com velocidade angular $\bar{\omega}_0$. Num certo instante, a barra se parte espontaneamente (sem ação de nenhum agente externo), passando a girar como indica o segundo exemplo (dados: $a = 10\text{ m}$, $\omega_0 = 1,0\text{ rad/s}$ e $m = 1,0\text{ kg}$).

Figura 10.38: Exercício 8.



a) Quais os valores de ω e ϕ ?

b) A energia mecânica se conserva? Explique.

10.10*. Uma barra de comprimento l e massa M pode girar livremente em torno de um pino (colocado em A), num plano vertical. Um projétil de massa m e velocidade \bar{v} atinge a barra, como mostra a Figura 10.40, ficando alojado nela.

a) Calcule a velocidade angular de rotação da barra imediatamente após a colisão.

b) Que relação deve existir entre a e l para que não haja uma força extra do pino sobre a barra no instante da colisão?

c) Qual é a quantidade de energia transformada em calor durante o processo?

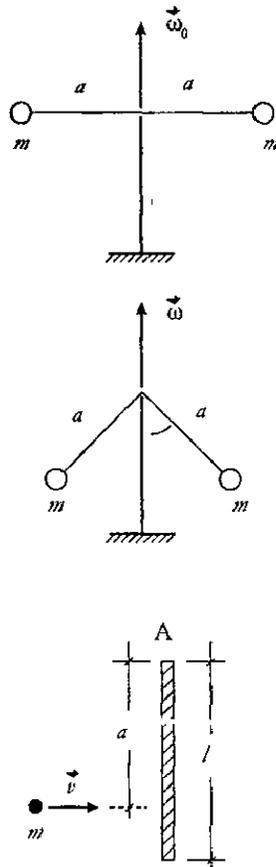
10.11*. Uma barra homogênea e estreita de massa m e comprimento l é mantida verticalmente com uma das extremidades apoiadas no chão (veja Figura 10.41). Ela é então deixada cair. Supondo que a extremidade apoiada no chão não desliza, determine a velocidade da outra extremidade quando toca o chão.

10.12*. Para deslocar um tambor de massa M e raio R são usados dois dispositivos, como mostra a Figura 10.42. No primeiro caso, a força é aplicada no eixo de rotação do tambor. No segundo, uma corda é enrolada sobre ele e puxada tangencialmente. Desejando-se deslocar o tambor com uma aceleração \bar{a} , sem deslizamento, calcule a força em cada caso. Calcule também a força de atrito entre o tambor e o solo em cada caso (elas não foram especificadas na figura).

10.13*. Um disco de raio R e massa M está enrolado num fio e disposto como na Figura 10.43. Calcule a aceleração com que o centro de massa do sistema desce.

10.14. Um disco uniforme de raio R e massa M está inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal, sem atrito. A partir de um instante inicial $t = 0$,

Figura 10.39: Exercício 9.



puxa-se o fio com uma força horizontal e constante como indica a Figura 10.44: Pode-se calcular \vec{v}_{CM} e $\vec{\omega}_{CM}$ para cada instante $t > 0$.

10.15. Uma haste de comprimento l está sobre uma mesa horizontal, sem atrito. Sua massa é M e pode mover-se livremente. Um pequeno disco de massa m move-se com uma velocidade \vec{v} , como indica a Figura 10.45, e colide elasticamente com a haste. Quais são as quantidades conservadas (explique). Qual deve ser a massa m para que o disco permaneça em repouso após o choque?

10.16. O sistema da Figura 10.46 representa dois cilindros que se movem me-

Figura 10.40: Exercício 10.

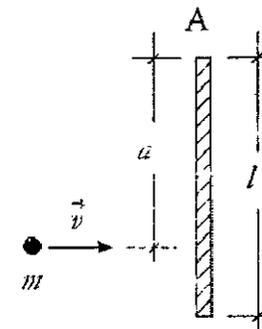
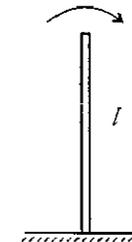


Figura 10.41: Exercício 11.



diante a ação de uma força \vec{F} . Cada cilindro possui massa m e raio R . Em termos destes dados, calcule:

- a aceleração do sistema;
- a força de atrito em cada roda.

10.17. Calcule a força de tensão indicada na Figura 10.47. O sistema suporta uma massa de 200 kg e os pesos das roldanas são desprezíveis.

10.18*. Seja uma corda de densidade linear de massa ρ , suspensa pelos extremos como mostra a Figura 10.48. Obtenha a equação da curva descrita pela corda.

10.19*. Um truque interessante que pode ser feito com uma bola de gude, colocada sobre uma mesa horizontal, é pressioná-la com o dedo de maneira a

Figura 10.42: Exercício 12.

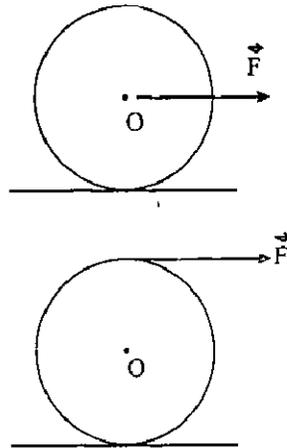
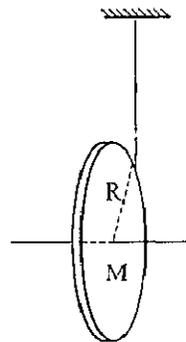


Figura 10.43: Exercício 13.



projetá-la para a frente e girando. Considere que a bola saia com velocidades \vec{v}_0 e $\vec{\omega}_0$ (veja Figura 10.49). O coeficiente de atrito estático entre a boia de gude (raio R) e a mesa é constante.

a) Que relação precisamos ter entre v_0 , R e ω_0 para que a bola deslize até parar completamente?

b) Idem para o caso de a bola deslizar, parar e depois voltar até atingir uma velocidade constante final igual a $\frac{3}{7}v_0$?

Figura 10.44: Exercício 14.

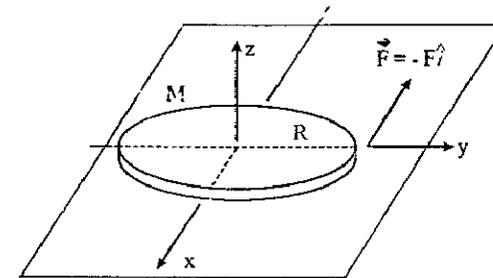


Figura 10.45: Exercício 15.

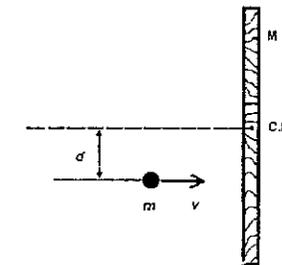
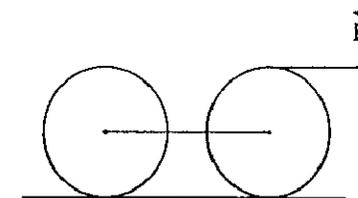


Figura 10.46: Exercício 16.



10.20. A barra de $9m$ da Figura 10.50 possui uma massa de 600 kg . Calcule as forças nos cabos T_1 , T_2 e T_3 , bem como o esforço no ponto A .

10.21. Cada uma das esferas da Figura 10.51 possui massa m e diâmetro desprezível perante a dimensão b . Calcule os momentos e produtos de inércia

Figura 10.47: Exercício 17.

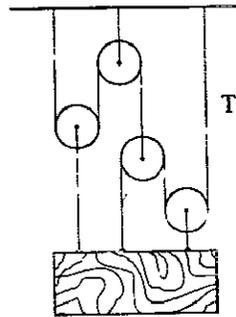


Figura 10.48: Exercício 18.

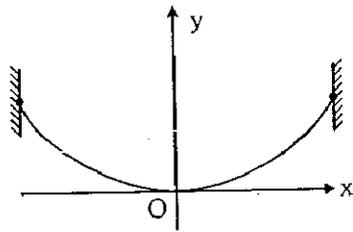
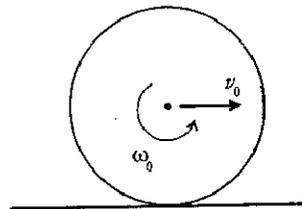


Figura 10.49: Exercício 19.



para os eixos indicados. Calcule os momentos principais de inércia.

10.22. Uma hélice está transladando em torno de um eixo vertical, num círculo de raio l e com uma velocidade angular $\bar{\Omega}$, constante, como mostra a Figura 10.52. A hélice também gira durante o movimento, com velocidade angular de módulo

Figura 10.50: Exercício 20.

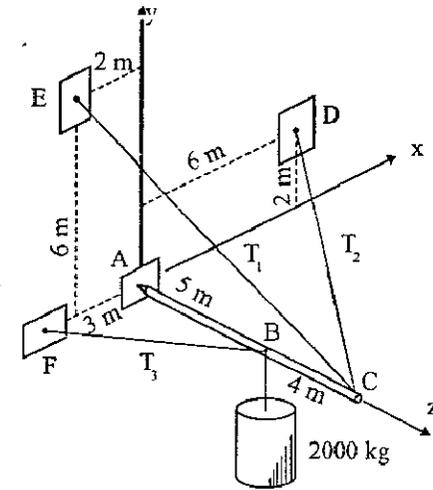
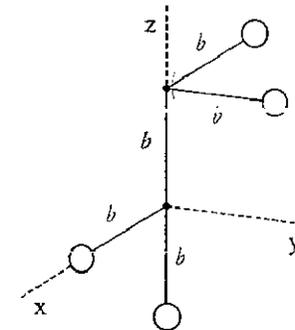


Figura 10.51: Exercício 21.

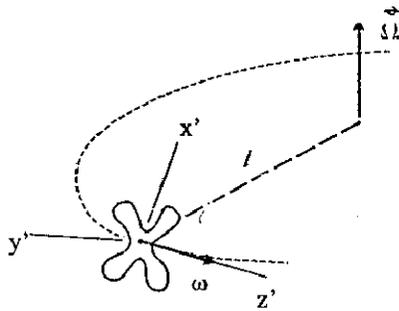


constante. Calcule o torque exercido sobre o eixo da hélice (x', y' e z' são eixos de simetria da hélice).

10.23. Mostre que todo eixo que passa pelo centro de um cubo é principal.

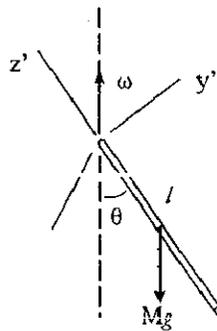
10.24. Seja uma barra homogênea de comprimento l , massa M e girando em torno de um eixo vertical, como mostra a Figura 10.53. Mostre que o valor de θ , para o qual a velocidade angular $\bar{\omega}$ é constante, é dado por $\cos \theta = 3g/2l\omega^2$ (x' ,

Figura 10.52: Exercício 22.



y' e z' são eixos de simetria da barra - considere que y' está no plano da barra com o eixo).

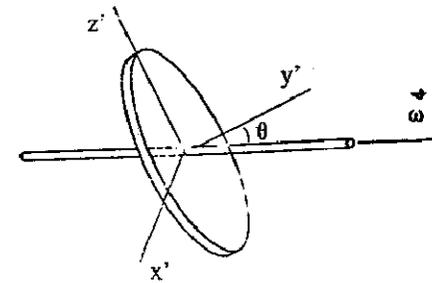
Figura 10.53: Exercício 24.



10.25. Um disco uniforme de raio R e massa M é preso a uma haste que passa pelo centro do disco (veja Figura 10.54). A haste gira com velocidade angular constante e é inclinada de um ângulo θ em relação à normal ao disco (eixo y'). Os eixos x' , y' e z' são eixos de simetria do disco. Considere que x' é perpendicular à haste e que x' e z' pertencem ao plano do disco. Calcule o torque exercido sobre a haste.

10.26. Calcular os momentos principais de inércia para os seguintes sistemas, considerando o CM como referência:

Figura 10.54: Exercício 25.



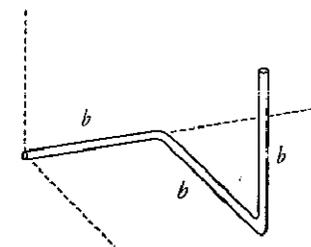
a) Três massas pontuais, m_1 , m_2 e m_3 , situadas nos vértices de um triângulo equilátero.

b) Quatro massas pontuais, m_1 , m_2 , m_3 e m_4 , situadas nos vértices de um tetraedro regular.

10.27. A barra da Figura 10.55 está dobrada em ângulos retos e possui massa M .

- Calcule os momentos e produtos de inércia para os eixos indicados.
- Calcule os momentos principais de inércia.

Figura 10.55: Exercício 27.



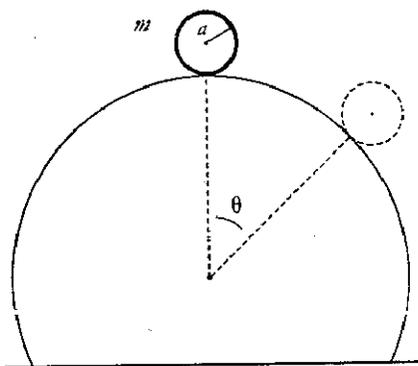
10.28. Faça um estudo do movimento do pião para as seguintes condições: Em $t = 0$ temos $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. Depois, estude sob que condições é possível ter um precessão sem nutação, isto é, $\theta_1 = \theta_2$. Finalmente, faça um estudo do caso onde inicialmente $\theta_0 = 0$ e $\dot{\theta} = 0$.

10.29. Tês massas pontuais e iguais estão localizadas em $(a,0,0)$, $(0,a,2a)$ e $(0,2a,a)$. Ache os momentos de inércia principais considerando a origem como referência.

10.30. Ache os momentos de inércia principais em torno do centro de massa de um corpo rígido plano em forma de um triângulo isósceles, possuindo densidade uniforme.

10.31. Uma esfera de massa m e raio a rola, sem deslizar, sobre uma esfera maior de raio R (veja Figura 10.56). Considere que a esfera menor tenha partido da posição superior praticamente em repouso. Calcule o ângulo θ onde esta esfera perde o contacto com a esfera maior.

Figura 10.56: Exercício 31.



CAPÍTULO 11

Cálculo variacional

O Cálculo Variacional é um assunto da maior importância para o que vamos desenvolver a partir do Capítulo 12. Neste capítulo, vamos estudar os seus princípios gerais e discutir os chamados *Problemas Clássicos do Cálculo Variacional*, que motivaram o seu desenvolvimento.

Para iniciar, observemos a expressão

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), x) dx. \quad (11.1)$$

Notamos que I não depende da variável contínua x , pois estamos integrando em todo x e, após a integração, o x desaparece. Entretanto, I depende do tipo de função y . Está claro que I terá um valor característico para cada tipo de função y .

Por exemplo, seja

$$F(y(x), x) = xy(x), \quad (11.2)$$

e os limites de integração $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Consideremos, inicialmente, que $y(x) = x^2$. Então,

$$I = \int_1^2 x x^2 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Se, por outro lado, $y(x) = x^3$, teremos,

$$I = \int_1^2 x x^3 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}.$$

Como vemos, temos aqui uma dependência funcional diferente da que comumente conhecíamos. I é uma função de uma outra função. I é dito ser um funcional de y e geralmente se representa

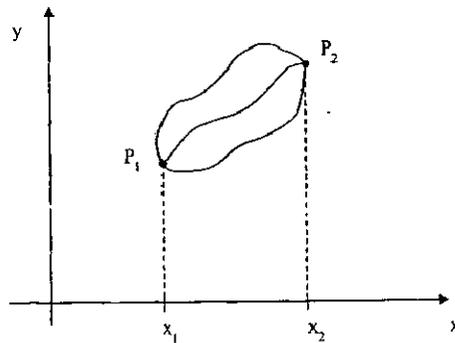
$$I = I[y]. \quad (11.3)$$

Neste ponto, podemos ver o papel do Cálculo Variacional. Ele está relacionado aos funcionais, assim como o cálculo usual está relacionado às funções.

11.1 Equação de Euler-Lagrange

Consideremos a seguinte questão: Para que função $y(x)$, que passa pelos pontos P_1 e P_2 , teremos um I extremo (máximo ou mínimo)? A Figura 11.1 esclarece o que está sendo perguntado

Figura 11.1: Curvas ligando os pontos P_1 e P_2 .



Por analogia com o cálculo usual, é fácil ver o caminho que deveremos seguir. Quando estamos interessados em determinar para que valor de x a função $y(x)$ é um extremo, damos um acréscimo à variável x e procuramos para qual x temos $dy = 0$, isto é,

$$dy = y(x + dx) - y(x), \quad (11.4)$$

onde dx é uma quantidade infinitesimal e, por estarmos considerando $y(x)$ contínua, dy também é infinitesimal.

Expandindo $y(x + dx)$ em série de Taylor no entorno do ponto x e desprezando os infinitésimos de ordem superior, temos

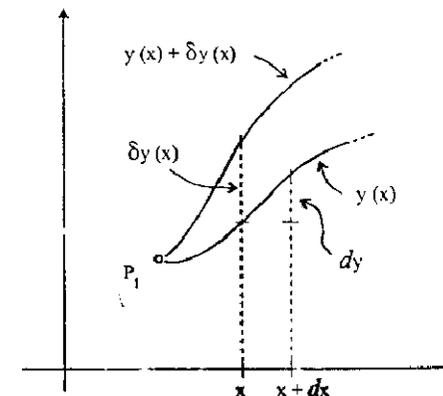
$$dy = y(x) + dx \frac{dy}{dx} + O(dx^2) - y(x) = \frac{dy}{dx} dx. \quad (11.5)$$

Como $dx \neq 0$, temos que $dy = 0$ se $dy/dx = 0$. Você, naturalmente, deve estar questionando por que esta maneira não muito direta de concluir que a condição de extremo de uma função $y(x)$ é $dy/dx = 0$. A finalidade é que seguiremos os mesmos passos para o caso de funcionais. Nem sempre, como veremos a, a condição de extremo para o caso dos funcionais assemelha-se à condição $dy/dx = 0$.

Para os funcionais, o conceito de acréscimo se torna diferente. No caso da função $y(x)$, passamos para o ponto $x + dx$ e escrevemos $y(x)$ neste ponto. Depois, tomamos dy e vimos qual a condição para dy ser nulo. Agora, para os funcionais, temos que o valor de I depende do tipo de curva $y(x)$. Então, seguindo caminho semelhante, passaremos para a curva infinitamente próxima $y + \delta y$ e procuraremos a variação correspondente δI . A curva $y(x)$ corresponderá a um extremo se $\delta I = 0$.

Vamos explicar a notação que estamos usando para $\delta y(x)$, se contrapondo a $dy(x)$. Realmente, $\delta y(x)$ e $dy(x)$ são quantidades fundamentalmente diferentes. $dy(x)$ corresponde, como sabemos, ao deslocamento do valor da função $y(x)$ para o deslocamento da variável x . No caso de δy , x continua o mesmo. O que muda é a função. A Figura 11.2 mostra, comparativamente, a diferença entre essas duas variações.

Figura 11.2: Diferença entre dy e δy .



O nosso problema em determinar o extremo de I é resolvido da seguinte

maneira

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \delta y, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y, x) dx. \quad (11.6)$$

Observe a semelhança com o desenvolvimento anterior. Expandindo $F(y + \delta y, x)$ no entorno de y , temos, após desprezar os infinitésimos de ordem superior a δy

$$F(y + \delta y, x) = F(y, x) + \frac{\partial F(y, x)}{\partial y} \delta y. \quad (11.7)$$

Então,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx. \quad (11.8)$$

A condição de extremo $\delta I = 0$ implica, portanto, que

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y} \delta y dx = 0. \quad (11.9)$$

Na integração acima, $\delta y(x)$, embora uma quantidade infinitesimal, é uma função arbitrária de x . Assim, para que a integração seja nula, para qualquer que seja a função infinitesimal $\delta y(x)$, é preciso que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (11.10)$$

O que acabamos de ver foi a maneira de achar a condição de extremo para $I = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ onde $F = F(y, x)$. A condição encontrada está expressa na relação (11.10). Este foi um caso bem simples. Seja, agora, o caso em que a função F possui a seguinte dependência

$$F = F(y(x), y'(x), x), \quad (11.11)$$

que é uma situação em que estaremos bastante interessados. Vemos que I é um funcional de y e y' , ou seja,

$$I = I[y, y']. \quad (11.12)$$

A condição de extremo para este caso é obtida através do que já desenvolvemos anteriormente. Primeiro, temos que

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx. \quad (11.13)$$

Para podermos extrair alguma conclusão da expressão acima, desenvolvamos convenientemente o segundo termo da integral,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Na segunda passagem, usamos que os operadores δ e d/dx são totalmente independentes (lembre-se de que δ é uma operação onde x não varia), isto é,

$$\delta \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \delta. \quad (11.15)$$

Na última das passagens de (11.14), usamos o fato de que todas as funções devem passar pelos pontos P_1 e P_2 . Portanto, $\delta y(x) = 0$ tanto para $x = x_1$ como para $x = x_2$.

Substituindo (11.14) em (11.13), vem

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \quad (11.16)$$

De acordo com o raciocínio que já usamos, tendo em conta que $\delta(x)$ é uma função arbitrária de x , temos que a condição de extremo $\delta I = 0$ acarreta que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (11.17)$$

Esta equação foi obtida por Euler em 1744. Ela é conhecida como *Equação de Euler-Lagrange* devido ser ela a base da formulação de lagrangiana da Mecânica Clássica, que estudaremos no Capítulo seguinte.

A relação (11.17) representa a condição de extremo para o funcional I , onde $F = F(y, y', x)$. Se esta condição corresponde a um mínimo ou máximo ficará patente pela natureza dos exemplos analisados.

A generalização imediata, agora, seria achar a condição de extremo para $F = F(y, y', y'', x)$. Faça isto como exercício. Considere que, para $x = x_1$ e $x = x_2$, $\delta y'(x) = 0$, além de $\delta y(x) = 0$.

11.2 Os três problemas clássicos do cálculo variacional

Estes problemas são.

1º) Qual das curvas planas, ligando dois pontos, possui menor comprimento?

2º) Dados dois pontos A e B , num plano vertical, que trajetória deverá seguir uma partícula, considerando estar atuando apenas o campo gravitacional (constante), para que o tempo gasto no percurso seja o menor possível¹?

3º) Dentre as curvas planas, qual a que gera a superfície de revolução de menor área?

11.2.1 Primeiro problema clássico

Sejam A e B dois pontos quaisquer de um plano, por exemplo, xy . Queremos saber qual das linhas que passando por esses dois pontos possui menor comprimento.

Seja ds um elemento de linha genérico deste plano, isto é,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (11.18)$$

Portanto, o comprimento de uma certa curva passando pelos pontos A e B será

$$S_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (11.19)$$

Comparando com o que vimos na seção anterior, podemos identificar a quantidade

$$F = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (11.20)$$

A condição de extremo (que, no caso, só pode ser mínimo) é dada, como vimos, pela Equação de Euler-Lagrange, expressão (11.17). No caso, $(\text{tial}F/\text{tial}y) = 0$. Então, $(\text{tial}F/\text{tial}y') = \text{constante}$. Assim, usando F dado por (11.20), encontramos

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{constante}. \quad (11.21)$$

¹Este problema foi formulado em 1696 por Johann Bernoulli e é chamado *problema da braquistócrona*. A sua resolução se constituiu na base e motivação para o desenvolvimento do cálculo variacional.

Esta equação fornece diretamente que $y' = a$, onde a é uma constante [não necessariamente a mesma constante que aparece em (11.21)]. Assim, temos que y é dado genericamente por

$$y = ax + b, \quad (11.22)$$

onde b é também constante. Portanto, a linha procurada é uma reta.

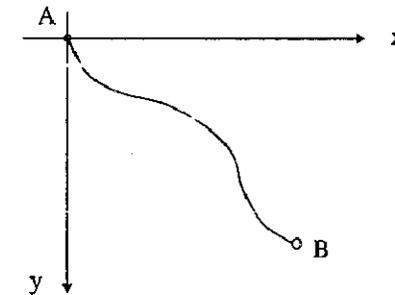
É claro que este problema levou-nos a um resultado por demais conhecido. Intuitivamente, pode parecer que os outros dois problemas darão resultados semelhantes, isto é, equações de reta. Veremos que isto não acontecerá.

11.2.2 Problema da braquistócrona

Sejam A e B dois pontos quaisquer de um plano vertical. Por comodidade, mas sem perda de generalidade, consideremos A na origem (veja Figura 11.3). Para um ponto qualquer da trajetória, temos

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}. \quad (11.23)$$

Figura 11.3: Superfície ligando dois pontos na vertical.



O tempo para ir de A até B é dado por

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{v}. \quad (11.24)$$

Considerando que

$$v = \sqrt{2gy} \quad \text{e} \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

temos,

$$t_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx. \quad (11.25)$$

Para que t_{AB} seja um extremo (no caso, não há dúvidas de que este extremo é um mínimo), o integrando deve satisfazer à Equação de Euler-Lagrange. É apenas uma questão de trabalho algébrico mostrar que

$$2yy'' + y'^2 + 1 = 0. \quad (11.26)$$

O nosso problema agora é resolver esta equação diferencial. Notamos que a variável x não aparece explicitamente. Para resolver tais tipos de equação diferencial, fazemos

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p' = \frac{dp}{dy} y' = p \frac{dp}{dy}.$$

Substituindo essas quantidades em (11.26), obtemos a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$2yp \frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0, \quad (11.27)$$

que é de fácil resolução,

$$\begin{aligned} \frac{2p dp}{p^2 + 1} &= -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(p^2 + 1) = -\ln(ay) \\ \Rightarrow \ln[ay(p^2 + 1)] &= 0 \Rightarrow ay(p^2 + 1) = 1 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{b}{y} - 1} \end{aligned} \quad (11.28)$$

onde a e b ($b = 1/a$) são constantes.

O próximo passo é substituir p por dy/dx no resultado (11.28) e partir para obter $y(x)$. Fazendo esta substituição, temos,

$$dx = \sqrt{\frac{y}{b-y}} dy. \quad (11.29)$$

O problema na integração de (11.29) é o radical. Vamos eliminá-lo fazendo, primeiro, a substituição $y = u^2 \Rightarrow dy = 2u du$. Então,

$$dx = \frac{2u^2 du}{\sqrt{c^2 - u^2}}, \quad (11.30)$$

onde $c^2 = b$. Façamos, agora, $u = c \sin \theta \Rightarrow \sqrt{c^2 - u^2} = c \cos \theta$ e $du = c \cos \theta d\theta$. Substituindo estes resultados em (11.30), vem,

$$\begin{aligned} dx &= 2c^2 \sin^2 \theta d\theta = c^2 (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ \Rightarrow x &= c^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (11.31)$$

Voltemos às variáveis iniciais. É uma mera questão de trabalho algébrico chegar a

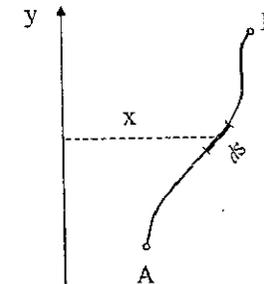
$$x = c^2 \arcsen \frac{\sqrt{y}}{c} - \sqrt{y(c^2 - y)}, \quad (11.32)$$

onde a constante indicada em (11.31) é zero porque estamos considerando a curva passando pela origem. A equação dada por (11.32) é uma *ciclóide*.

11.2.3 Terceiro problema clássico

Veja a Figura 11.4. Sejam A e B dois pontos por onde podem passar várias curvas. Queremos saber qual dessas curvas corresponde uma superfície de revolução mínima. A curva geratriz foi considerada no plano xy e y é o eixo de revolução.

Figura 11.4: Geratriz de superfície de revolução mínima.

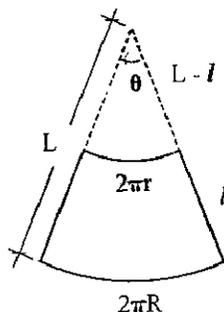


Pela revolução do elemento ds em torno do eixo y , temos que a área da superfície de revolução correspondente é dada por

$$dA = 2\pi x ds. \quad (11.33)$$

Esta expressão corresponde a área lateral de um tronco de cone de raio médio x e aresta lateral ds . Vamos mostrar que o que acabei de dizer é realmente verdade. Seja um tronco de cone de raios r e R e geratriz l . A retificação deste tronco está mostrada na Figura 11.5.

Figura 11.5: Retificação da área lateral de um tronco de cone.



Como a área da esfera de raio L ($A_0 = \pi L^2$) corresponde a um ângulo $\theta = 2\pi$, temos que a fatia da esfera subtendida pelo ângulo θ é dada por $A_\theta = L^2 \theta / 2$. Assim, temos que a área lateral do cone é

$$A = \left[L^2 - (L-l)^2 \right] \frac{\theta}{2}. \quad (11.34)$$

Pela Figura 11.5, também temos que

$$\theta = \frac{2\pi R}{L} = \frac{2\pi r}{L-l}. \quad (11.35)$$

Combinando (11.34) e (11.35), obtemos

$$A = 2\pi \frac{R+r}{2} l, \quad (11.36)$$

que é o resultado a que queríamos chegar. Voltemos, agora, à relação (11.33). Como $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, temos

$$A = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} x \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (11.37)$$

Então, a condição de extremo (no caso mínimo), é obtida através da equação de Euler-Lagrange usando a função $F = x \sqrt{1 + y'^2}$. O resultado é

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a, \quad (11.38)$$

onde a é uma constante, vinda do fato de $\partial F / \partial y = 0 \Rightarrow \partial F / \partial y' = \text{const.} = a$. A equação (11.38) permite escrever

$$dy = \frac{a dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (11.39)$$

A eliminação do radical desta expressão pode ser feita através da conveniente mudança de variável $x = a \cosh \theta \Rightarrow dx = a \sinh \theta d\theta$ e $\sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh \theta$. Assim, temos

$$dy = a d\theta \Rightarrow y = a \theta + b, \quad (11.40)$$

onde b é outra constante. Voltando às variáveis iniciais, temos

$$y = a \operatorname{arccos} \frac{x}{a} + b, \quad (11.41)$$

que é a equação de uma *catenária*, curva dada pelo cosseno hiperbólico.

11.3 Problemas isoperimétricos (vínculos)

Vamos voltar ao início, quando procurávamos a curva que ligava os pontos P_1 e P_2 tal que o funcional I , dado por

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx, \quad (11.42)$$

fosse um extremo. Após algum desenvolvimento algébrico, chegamos a

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx. \quad (11.43)$$

Como estamos procurando a condição para I extremos, temos

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx = 0. \quad (11.44)$$

Naqueia oportunidade, tínhamos concluído que a equação de Euler-Lagrange deveria ser verificada, já que $\delta y(x)$, embora infinitesimal, era uma função arbitrária de x .

Consideremos agora que isto não seja mais verdade, isto é, que $\delta y(x)$ seja uma função arbitrária de x . Consideremos que exista uma certa condição (vínculo) envolvendo as quantidades y , y' e x . Por exemplo, consideremos que este vínculo seja dado por uma relação integral (isto não é necessariamente obrigatório) do tipo

$$J = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y') dx, \quad (11.45)$$

onde J é uma certa quantidade fixa ($\delta J = 0$).

Não podemos, agora, de (11.44) extrair a equação de Euler-Lagrange na forma apresentada em (11.17). Isto porque $\delta y(x)$ não é mais uma quantidade independente. Existe uma condição de vínculo envolvendo $\delta y(x)$ que é dada por (11.45). Vejamos, então, como tratar este problema.

Como J é uma quantidade fixa ($\delta J = 0$), temos de (11.45) que

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0. \quad (11.46)$$

Multipliquemos esta equação por λ (um parâmetro qualquer) e somemos o resultado com a Eq. (11.44). O resultado é

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial y} (F + \lambda g) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (F + \lambda g) \right] \delta y(x) dx = 0. \quad (11.47)$$

Na relação acima, continuamos tendo $\delta y(x) = 0$ não arbitrário. Entretanto, ela também deve ser válida para qualquer valor do parâmetro λ . Isto só será verdade se

$$\frac{\partial}{\partial y} (F + \lambda g) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (F + \lambda g) = 0. \quad (11.48)$$

O parâmetro λ é o preço pago pela existência da condição de vínculo (11.45).

Vejamos, agora, dois problemas clássicos contendo tais tipos de vínculo. Estes problemas são chamados de *isoperimétricos*. O porquê do nome ficará evidente mais adiante.

11.3.1 Primeiro problema

Consideremos que tenhamos uma linha inextensível de comprimento L . De todas as curvas fechadas, que podemos formar com esta linha, queremos saber qual a que possui maior área (observe que temos agora um problema de máximo).

A área de uma curva fechada é dada por

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{r}. \quad (11.49)$$

Vamos demonstrar esta relação. Seja a integral

$$\vec{I} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{r}. \quad (11.50)$$

Multipliquemos ambos os seus lados escalarmente por um vetor arbitrário constante \vec{a} ,

$$\vec{I} \cdot \vec{a} = \oint_C \vec{r} \times d\vec{r} \cdot \vec{a} = \oint_C \vec{a} \times \vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot d\vec{S}, \quad (11.51)$$

onde, na última passagem, foi usado o teorema de Stokes (conseqüentemente, S é uma superfície limitada pela curva fechada C). Como,

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) &= \vec{a} \text{div} \vec{r} - \vec{r} \text{div} \vec{a} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} \\ &= \vec{a} \text{div} \vec{r} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = 3\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{a}. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Então,

$$\vec{I} \cdot \vec{a} = 2 \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = 2\vec{a} \cdot \vec{S}.$$

Como \vec{a} é um vetor arbitrário qualquer, temos que $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{I}$ e fica portanto demonstrada a relação inicial (11.49).

Consideremos que a curva do nosso problema esteja no plano xy . Assim, usando (11.49), temos

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) \hat{k} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \oint_C (xy' - y) dx, \quad (11.53)$$

onde $y' = dy/dx$. Esta curva deve satisfazer a condição de ter comprimento fixo L . Assim,

$$L = \oint_C ds = \oint_C \sqrt{dx^2 + dy^2} = \oint_C \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (11.54)$$

Portanto, para que S seja um extremo (é evidente que este extremo é um máximo pois o mínimo seria zero), deveremos ter uma equação do tipo (11.48) satisfeita, onde

$$F = \frac{1}{2}(xy' - y) \quad \text{e} \quad g = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (11.55)$$

Assim, é apenas uma questão de trabalho algébrico mostrar que a utilização da expressão (11.48) fornece

$$\frac{\lambda y''}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\lambda y'^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} + 1 = 0. \quad (11.56)$$

Também é apenas uma questão de trabalho algébrico mostrar que esta relação se simplifica em

$$\lambda y'' + (1 + y'^2)^{3/2} = 0. \quad (11.57)$$

Para resolver esta equação, fazemos $y' = p \Rightarrow y'' = p' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$. Portanto, podemos reescrever a relação (11.57) como

$$\lambda p(1 + p^2)^{-3/2} dp = -dy, \quad (11.58)$$

que pode ser diretamente integrada e dando como resultado

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + p^2}} = y - y_0, \quad (11.59)$$

onde y_0 é uma constante. Desenvolvendo a expressão acima, temos,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= (y - y_0)^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \Rightarrow \frac{\lambda^2}{(y - y_0)^2} - 1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ \Rightarrow dx &= \frac{(y - y_0) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - y_0)^2}}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Esta equação também pode ser diretamente integrada, fornecendo,

$$x - x_0 = -\sqrt{\lambda^2 - (y - y_0)^2} \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \lambda^2. \quad (11.61)$$

Então, a curva procurada é um círculo de raio λ e centro em (x_0, y_0) . Tendo em conta que o comprimento da curva é L , λ é dado por $\lambda = L/2\pi$. Os

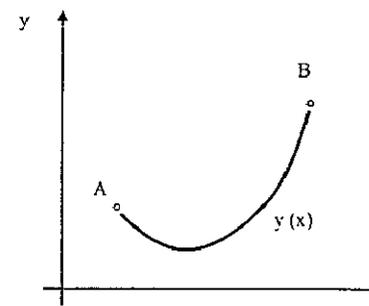
pontos x_0 e y_0 são arbitrários e, simplesmente, localizam a posição do centro do círculo.

O resultado obtido já era intuitivamente esperado. Veiamos um outro exemplo do gênero.

11.3.2 Segundo problema

Seja uma corda de densidade uniforme e perfeitamente flexível. Esta corda é fixa em dois pontos como mostra a Figura 11.6. O comprimento da corda é L . Sabendo que a corda subentenderá uma curva tal que a sua energia potencial será mínima, que curva é esta?

Figura 11.6: Corda flexível fixa em dois pontos.



Considerando ρ a densidade linear da corda, temos que a energia potencial é dada por

$$E_p = \rho g \int_A^B y ds = \rho g \int_{x_A}^{x_B} y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (11.62)$$

O vínculo do problema é que o comprimento da corda seja fixo, isto é,

$$L = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (11.63)$$

Pelo que já vimos anteriormente, devemos aplicar a Eq. de Euler-Lagrange à função $\rho g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$. Convenientemente, escrevamos o parâmetro λ como $\lambda = -\rho g y_0$. Aplicando, então, a Eq. de Euler-Lagrange a esta função e fazendo alguns desenvolvimentos algébricos, chegamos a

$$1 + y'^2 - (y - y_0)y'' = 0. \quad (11.64)$$

Para saber sobre o tipo de curva que liga os pontos A e B , temos de resolver a equação diferencial acima. Façamos, $y - y_0 = \eta(x)$. Temos, então,

$$1 + \eta'^2 - \eta\eta'' = 0. \quad (11.65)$$

Para este tipo de equação, onde a variável x não aparece explicitamente, fazemos, como já nos é usual, $\eta' = p$. Isto leva-nos a

$$\begin{aligned} 1 + p^2 - \eta p \frac{dp}{d\eta} = 0 &\Rightarrow \frac{p dp}{1 + p^2} = \frac{d\eta}{\eta} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + p^2) = \ln a\eta (a = \text{const.}) &\Rightarrow a\eta = \sqrt{1 + p^2} \\ \Rightarrow p = \frac{1}{b} \sqrt{\eta^2 - b^2} \left(b = \frac{1}{a}\right) &\Rightarrow \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - b^2}} = \frac{dx}{b}. \end{aligned} \quad (11.66)$$

O radical que aparece na expressão acima pode ser eliminado fazendo $\eta = b \operatorname{ch} \theta$. Assim, $\sqrt{\eta^2 - b^2} = b \operatorname{sh} \theta$ e $d\eta = b \operatorname{sh} \theta d\theta$. Substituindo estas quantidades na relação (11.66), encontramos

$$d\theta = \frac{dx}{a}. \quad (11.67)$$

Fazendo a integração acima (que é algo bem direto) e voltando à variáveis iniciais, temos,

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{b} = \theta = \operatorname{arcch} \frac{\eta}{b} &\Rightarrow \eta = b \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{b} \\ \Rightarrow y = y_0 + b \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{b}\right). \end{aligned} \quad (11.68)$$

A curva acima é uma *caienária*. As três constantes x_0 , y_0 e b são escolhidas de tal maneira que a curva passe pelos pontos A e B e tenha comprimento L . (Esta foi uma outra maneira de se resolver o exercício X.18.)

► Exercícios

11.1. Obter a condição de extremo para $I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', y'', x)$

11.2. Obter (11.26).

11.3*. Mostre que as geodésicas de uma superfície esférica são grandes círculos, isto é, círculos com centro no centro da esfera.

11.4. Obtenha (11.56) e (11.57).

11.5. Obtenha (11.64).

11.6. Resolva o problema da menor distância entre dois pontos (caso plano) usando coordenadas polares ($ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$).

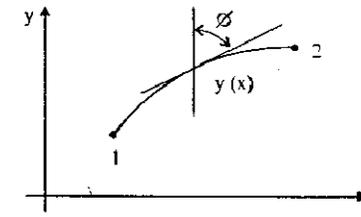
11.7. O princípio de Fermat estabelece que se a velocidade da luz é dada por uma função contínua $u = u(y)$, a trajetória da luz unindo os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em um plano é tal que extremiza a integral

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{u}$$

a) Obtenha as leis de Snell a partir do princípio de Fermat, isto é, mostre que $(\sin \phi)/u = \text{const.}$, onde ϕ é o ângulo mostrado na Figura 11.7.

b) Suponha que a luz caminha no plano xy , de tal maneira que sua velocidade seja proporcional a y . Então, prove que os raios emitidos de qualquer ponto são círculos de centro no eixo x .

Figura 11.7: Exercício 7.



CAPÍTULO 12

Formulação lagrangiana da mecânica clássica

Até o Capítulo 10, tratamos da formulação newtoniana da Mecânica Clássica. Naquela oportunidade, vimos que o ponto de partida eram as leis de Newton. Vimos, também, o quão importante era o princípio de Galileo. Agora, o princípio de Galileo ainda continua sendo importante e fundamental, mas as leis de Newton não serão mais o ponto de partida. Estas darão lugar a algo mais geral, o chamado *princípio de Hamilton*. Antes, porém, temos de fazer algumas introduções, mais precisamente sobre o que sejam *vínculos, graus de liberdade e coordenadas generalizadas*.

Seja o movimento de uma partícula no espaço. Dizemos que esta partícula possui três graus de liberdade, que são as possibilidades de movimento nas três dimensões do espaço em que vivemos. Sejam, agora, duas partículas. Neste caso, temos seis graus de liberdade. Isto é, o sistema das duas partículas precisa de seis coordenadas para a sua descrição (desde que não haja nenhuma ligação entre elas).

Consideremos, particularmente, que essas duas partículas estejam ligadas por uma haste rígida. Neste caso, o sistema não possui mais seis graus de liberdade. Existe um vínculo entre as duas partículas, que pode ser representado por uma expressão da forma

$$l = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2},$$

onde l é o comprimento da haste e $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ etc. são as coordenadas das duas partículas. Poderíamos, alternativamente, localizar este sistema usando cinco coordenadas independentes (o mesmo número dos graus de liberdade), podendo ser, por exemplo, x_1, y_1 e z_1 , para localização da primeira partícula, e mais dois ângulos para localização da segunda em relação à primeira.

Um corpo rígido (sistema cuja distância entre duas partículas quaisquer é

uma constante) possui seis graus de liberdade. Portanto, são necessárias seis coordenadas generalizadas para a sua localização. Podendo ser, por exemplo, tres coordenadas (x, y, z) para localização de um ponto qualquer do corpo rígido e mais três ângulos (θ, ϕ, ψ) , para orientação do corpo rígido em relação a este ponto.

No caso do corpo rígido, as seis coordenadas $(x, y, z, \theta, \phi, \psi)$ são suficientes para localizar um corpo rígido no espaço. Podemos, genericamente, chamar essas quantidades de q_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Como os q_i 's podem ser grandezas sem qualquer relacionamento com os sistemas de coordenadas usuais, eles são chamados de *coordenadas generalizadas*¹. Inclusive, essas coordenadas não precisam ser necessariamente ângulos e comprimentos. Podem ser quantidades gerais realmente, como, por exemplo, amplitudes numa expansão em série de Fourier.

O espaço formado pelas coordenadas generalizadas é chamado de *espaço das configurações*. As derivadas primeiras das coordenadas generalizadas em relação ao tempo são chamadas de *velocidades generalizadas*.

12.1 Princípio de Hamilton

Seja um certo sistema caracterizado por N coordenadas generalizadas (independentes ou não). A *configuração* deste sistema num certo instante t_1 é dada pelos valores das N coordenadas e das N velocidades generalizadas no instante t_1 (ou *momentos generalizados*, cuja definição será dada mais adiante). Conforme o tempo vai passando, o sistema vai evoluindo e, conseqüentemente, a configuração vai mudando. No instante t_2 , a configuração será provavelmente outra.

Estamos interessados na seguinte questão: Como o sistema evolui da configuração 1 (coordenadas e velocidades generalizadas no instante t_1) para a configuração 2? No caso da formulação newtoniana, isto é dado pela segunda lei de Newton. Agora, será pelo princípio de Hamilton. Vejamos o que vem a ser este princípio.

Caracterizemos o sistema por uma certa função escalar L (sobre a qual falaremos mais adiante), dependendo das N coordenadas e N velocidades generalizadas, podendo depender também do tempo,

¹Neste exemplo, o número de graus de liberdade coincide com o número de coordenadas generalizadas. Alguns autores relacionam uma coordenada generalizada a cada grau de liberdade. Não seguiremos esta norma aqui. Coordenada generalizada será, para nós, conforme o próprio nome está dizendo dizendo, uma generalização do conceito de coordenada, não sendo, necessariamente, independentes. Isto é, podem haver equações de vínculo entre elas.

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t), \quad (12.1)$$

ou, compactamente,

$$L = L(q, \dot{q}, t). \quad (12.2)$$

Por ora, mencionemos apenas que ela é chamada de *lagrangiana* do sistema e que a quantidade

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (12.3)$$

é chamada de *ação*.

O *princípio de Hamilton*, também denominado de *mínima ação*, estabelece o seguinte:

A evolução do sistema da configuração 1 para a configuração 2 é tal que a ação é um mínimo.

Pelo que vimos no Capítulo 11, sobre cálculo variacional, temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) dt. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Como os $\delta q_i(t)$ são funções arbitrárias de t , a condição de mínimo, $\delta S = 0$, é satisfeita se

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) = 0. \quad (12.5)$$

Se não houver relação de vínculo entre os q_i 's, temos que os diversos δq_i 's são independentes. Neste caso, e somente neste caso, temos

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.6)$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange (o nome de Euler está ligado ao cálculo variacional e o de Lagrange ao problema correspondente da Mecânica Clássica).

Ela nos dá a evolução temporal do sistema e representa para o formalismo lagrangiano o que a segunda lei de Newton representa para o formalismo newtoniano. É claro que a Eq. (12.6), aplicada no campo de ação da mecânica newtoniana, deve levar às mesmas equações diferenciais obtidas com a utilização da segunda lei de Newton.

Para usar a expressão (12.6), precisamos conhecer L , a lagrangiana do sistema. Pelo que foi desenvolvido até agora, não sabemos nada sobre $L(q, \dot{q}, t)$, apenas que é uma função escalar que caracteriza o sistema estudado.

Adotaremos aqui o seguinte procedimento. Adiantaremos a forma da lagrangiana que descreve o movimento dos corpos a baixas velocidades (relativamente à velocidade da luz) e de massa relativamente grande (comparativamente às massas das partículas elementares), isto é, para o campo de atuação da mecânica newtoniana. A finalidade disto é tornar mais familiar este novo formalismo no tratamento da mecânica, com aplicações em problemas práticos. Depois, retomaremos a teoria, espero que com os conceitos fundamentais já bem familiarizados.

A função lagrangiana para este caso é

$$L = T - V, \quad (12.7)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial do sistema. Não faremos mais comentários por enquanto. Mostraremos apenas que L da forma expressa em (12.7) faz com que a equação de Euler-Lagrange seja equivalente à segunda lei de Newton. Para facilitar, consideremos o caso de uma partícula numa região onde existe um certo potencial de interação. Assim,

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}). \quad (12.8)$$

Tomando as coordenadas generalizadas como coordenadas cartesianas, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = m\ddot{x}_i. \end{aligned} \quad (12.9)$$

O que faz com que a equação de Euler-Lagrange forneça

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (12.10)$$

que é a segunda lei de Newton para forças conservativas.

Antes de passarmos às aplicações, acho oportuno fazer alguns comentários.

(i) É claro que o que foi feito acima não é suficiente para aceitação da equação de Euler-Lagrange e, mais ainda, do princípio de Hamilton como um princípio físico. O que fizemos mostra, apenas, certa consistência para o caso particular que estamos desenvolvendo. O correto seria procurar consistência dentro do próprio formalismo e de princípios físicos gerais, sem recorrer ao caso particular das leis de Newton. Mas o nosso objetivo, no momento, é apenas de se familiarizar com o formalismo.

(ii) Como vimos, a relação (12.10) mostra uma consistência da equação de Euler-Lagrange com a segunda lei de Newton no caso de forças conservativas. Voltaremos a este ponto mais tarde. Por ora, mencionemos que isto se deve porque estamos tratando do caso sem vínculos.

(iii) Falamos que o princípio de Hamilton também se chama da *mínima ação*. Entretanto, quando obtivemos a equação de Euler-Lagrange, consideramos apenas a condição de extremo $\delta S = 0$ e não fizemos nenhuma menção posterior de esta condição corresponder realmente a um mínimo. A equação de Euler-Lagrange foi obtida considerando apenas a condição de extremo da ação. O porquê do nome *mínima ação* ficará patente quando nos reportarmos ao caso quântico. Voltaremos também a este ponto mais tarde.

12.2 Aplicações da equação de Euler-Lagrange

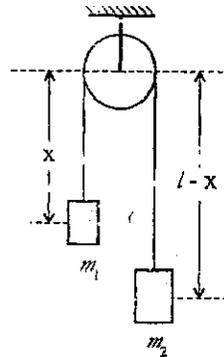
Acho bom dizer, logo de início, que não há nenhum problema de mecânica, resolvido com o formalismo lagrangiano, que não possa ser resolvido também pelo formalismo newtoniano. Assim, não será nossa intenção ficar usando exaustivamente o formalismo lagrangiano em problemas já estudados na Mecânica Newtoniana. Os exemplos considerados nesta seção terão objetivos de comparação entre os dois formalismos.

12.2.1 Máquina de Atwood

Ela já nos foi apresentada no exercício IV.11. A Figura 12.1 dá-nos uma representação. Consideraremos novamente que as massas da roldana e do fio (inextensível), que liga as massas m_1 e m_2 , sejam desprezíveis. O comprimento do fio é $l + \pi R$, onde R é o raio da roldana. Inicialmente, o que desejamos calcular é a aceleração com que os corpos se movem.

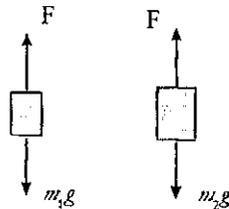
Como, no momento, o nosso objetivo principal é a comparação com o formalismo newtoniano, lembremos como seria a utilização da mecânica newtoniana neste problema. O isolamento dos corpos está dado na Figura 12.2.

Figura 12.1: Máquina de Atwood.



As forças que o fio exerce sobre m_1 e m_2 são as mesmas (em módulo) porque estamos desprezando as massas do fio e da roldana.

Figura 12.2: Isolamento dos corpos.



Supondo que $m_1 > m_2$ e aplicando a segunda lei de Newton para cada um dos corpos temos,

$$m_1g - F = m_1a,$$

$$F - m_2g = m_2a.$$

A combinação direta dessas duas equações fornece o valor da aceleração,

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{12.11}$$

Se quiséssemos calcular a força de tensão no fio, também não haveria dificuldades. O resultado seria

$$F = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{12.12}$$

Passemos a usar agora o método lagrangiano. O problema possui apenas um grau de liberdade. Tomemos x como coordenada generalizada independente (veja Figura 12.1). Considerando que as energias cinética e potencial do sistema são dadas respectivamente por

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2,$$

$$V = -m_1gx - m_2g(l-x),$$

temos para a lagrangiana [veja expressão (12.7)]

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_1gx + m_2g(l-x). \tag{12.13}$$

A utilização da equação de Euler-Lagrange fornece diretamente

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2)g$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\ddot{x}$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 - m_2)g = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{12.14}$$

que, obviamente, coincide (12.11), que é o resultado encontrado com a utilização do formalismo newtoniano.

Como vemos, aplicar a equação de Euler-Lagrange é algo relativamente simples. Na próxima subseção veremos o pêndulo simples e deixaremos outras aplicações como exercícios. Vamos concluir esta parte fazendo um comentário de natureza geral, dentro do formalismo.

Observamos que a forma da lagrangiana para o campo de atuação da mecânica newtoniana, $L = T - V$, subentende o caso de forças conservativas, devido à presença da energia potencial V . Entretanto, outras forças podem estar presentes no formalismo, desde que não dissipem energia. Este é o caso das forças de tensão, normal e, às vezes, da força de atrito estático (nos rolamentos sem deslizamentos). Estas forças aparecem no formalismo como vínculos, por isso são chamadas, também, de *forças de vínculo*. A força de atrito cinético não se encaixa neste caso.

Vamos ver como podemos determinar a força de tensão da máquina de Atwood. Ela vem do fato de o comprimento l do fio ser constante. Consideremos que esta condição não seja colocada logo de início e que l seja também uma coordenada generalizada (introduziremos a condição $l = \text{constante}$ como um vínculo). Assim, não podemos, da condição de mínima ação,

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0, \quad (12.15)$$

extrair a Eq. de Euler-Lagrange (veja detalhes no Capítulo 11), pois as coordenadas generalizadas (no caso x e l) não são independentes.

As energias cinética e potencial são

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{l} - \dot{x})^2, \\ V &= -m_1 g x - m_2 g (l - x). \end{aligned} \quad (12.16)$$

Substituindo $L = T - V$, obtido de (12.16), em (12.15) encontramos

$$[m_1 \ddot{x} - m_2 (\ddot{l} - \ddot{x}) - m_1 g + m_2 g] \delta x + [m_2 (\ddot{l} - \ddot{x}) - m_2 g] \delta l = 0. \quad (12.17)$$

Introduzindo a condição $l = \text{constante}$ como um vínculo, através do multiplicador de Lagrange λ , obtemos

$$\lambda \delta l = 0. \quad (12.18)$$

Somando (12.18) à Eq. (12.17), vem

$$[m_1 \ddot{x} - m_2 (\ddot{l} - \ddot{x}) - m_1 g + m_2 g] \delta x + [m_2 (\ddot{l} - \ddot{x}) - m_2 g + \lambda] \delta l = 0. \quad (12.19)$$

Na relação (12.17), não podíamos concluir que os coeficientes de δx e de δl eram zero porque δx e de δl não são independentes. Na relação (12.19) eles continuam não sendo independentes, mas há um parâmetro arbitrário λ no segundo termo. Escolhamos, então, um λ tal que o segundo termo seja nulo, isto é,

$$-m_2 x - m_2 g + \lambda = 0, \quad (12.20)$$

onde foi feito $l = 0$. Levando este resultado em (12.19), temos que o primeiro termo também será nulo,

$$m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} - m_1 g + m_2 g = 0. \quad (12.21)$$

De (12.21) obtemos o \ddot{x} dado por (12.14). Combinando este resultado com (12.20) obtemos λ

$$\lambda = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (12.22)$$

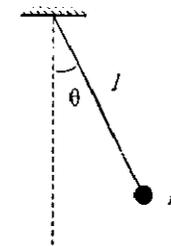
Como vemos, comparando com (12.12), λ (parâmetro que utilizamos para introduzir a condição de vínculo) é a força de tensão.

12.2.2 Pêndulo simples

Seja o pêndulo simples da Figura 12.3. Vamos usar direto o formalismo lagrangiano. Primeiro, tomemos o caso sem vínculos, onde só há, portanto, uma coordenada generalizada. Consideraremos que esta variável seja θ . A lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l \cos \theta. \quad (12.23)$$

Figura 12.3: Pêndulo simples.



Pela Eq. de Euler-Lagrange,

$$g \sin \theta + l \ddot{\theta} = 0. \quad (12.24)$$

Fazendo a aproximação de pequenos ângulos, obtemos a conhecida equação diferencial do oscilador harmônico. Fica como um exercício calcular a força de tensão na corda.

12.3 A Lagrangiana

Vamos relembrar o que fizemos até agora, dentro do formalismo lagrangiano. Primeiro, admitimos que um sistema físico, descrito por N coordenadas generalizadas, era caracterizado por uma certa função escalar $L(q, \dot{q}, t)$ (*lagrangiana*), onde q e \dot{q} estão representando as N coordenadas e velocidades generalizadas. Depois, vimos que a evolução do sistema de uma certa configuração 1, isto é, $q(t_1)$ e $\dot{q}(t_1)$, para uma outra configuração 2, $q(t_2)$ e $\dot{q}(t_2)$, se processava de tal maneira que a ação S do sistema, $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, era um mínimo (*princípio de Hamilton ou da mínima ação*). Não havendo relações de vínculo entre as coordenadas generalizadas, obtém-se a equação de Euler-Lagrange.

Ficaram entretanto no ar mais detalhes sobre esta função L . O princípio de Hamilton não nos dá isto, o que, de certa forma, já era esperado! A lagrangiana do sistema deve depender da sua natureza. Por exemplo, para um sistema de partículas interagindo entre si, a lagrangiana correspondente deve depender do tipo de interação. Algo parecido ocorre com a segunda lei de Newton. Ela nos diz apenas que a resultante das forças é igual a $d\vec{p}/dt$, mas não nos diz que forças são essas.

Vimos que, para o campo de atuação da Mecânica Newtoniana, a forma geral da lagrangiana era dada por $L = T - V$. Mas, mesmo assim, por que não $L = T + V$, ou $L = T - 2V$, ou outra coisa qualquer?

Para responder a essa pergunta e, conseqüentemente, ter um entendimento melhor sobre a função lagrangiana e, mais amplamente, do formalismo lagrangiano, vamos falar sobre algumas propriedades gerais que a função lagrangiana deve satisfazer.

Se o princípio de Hamilton expressa realmente uma lei física, ele deve ser o mesmo para todos os observadores inerciais. Como sabemos, este é um princípio físico geral muito importante, conhecido como *princípio da relatividade* ou *princípio de Galileo*².

Vamos considerar então o caso de uma partícula livre³ (não relativística) vista de um referencial não inercial. Por que isto? Ora, não havendo interação não precisaremos de informações adicionais para construir a lagrangiana do sistema. Ela, neste caso, deve ser obtida apenas com o princípio de Hamilton

²Podemos dizer que o princípio de Galileo juntamente com o princípio de conservação de energia estão entre os mais importantes princípios da Física.

³Entende-se por partícula livre uma partícula que não está sujeita a nenhuma interação. Veja bem, não estamos dizendo que sua velocidade seja constante. Isto deve ser concluído partir da teoria, assim como o é na Mecânica Newtoniana através da segunda lei de Newton

e com o princípio de Galileo.

Consideremos o espaço onde a partícula se move, homogêneo e isotrópico (não há motivo algum para ser de outra forma). Assim, a lagrangiana não deve depender de onde escolhemos a origem do sistema de coordenadas nem da orientação dos seus eixos. Isto é, a lagrangiana deve depender apenas do módulo da velocidade da partícula

$$L = L(v^2). \quad (12.25)$$

Não estamos dizendo que a lagrangiana seja necessariamente proporcional a v^2 . Estamos dizendo que ela é uma função de v^2 .

Passemos, agora, para um outro referencial inercial movendo-se com velocidade \vec{V} (constante) em relação ao referencial acima (veja Figura 12.4). Para este referencial, deveremos ter, logicamente,

$$L = L(v'^2), \quad (12.26)$$

pois L é uma função escalar e, conseqüentemente, sua dependência funcional não muda. De acordo com a Figura 12.4, temos,

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{OO}'(t) \Rightarrow \vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}. \quad (12.27)$$

Substituindo (12.27) em (12.26), temos

$$\bar{L}(v'^2) = \bar{L}(v^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V} + V^2). \quad (12.28)$$

Façamos um desenvolvimento em série de Taylor no entorno do ponto v^2 ,

$$\begin{aligned} L(v^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V} + V^2) &= L(v^2) + (V^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V}) \frac{dL}{dv^2} \\ &+ \frac{(V^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V})^2}{2!} \frac{d^2L}{d(v^2)^2} \\ &+ \frac{(V^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V})^3}{3!} \frac{d^3L}{d(v^2)^3} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (12.29)$$

Abramos um parêntese para explicar uma propriedade da lagrangiana. Pelo princípio de Hamilton podemos concluir que a lagrangiana pode sempre ser definida a menos da derivada total, em relação ao tempo, de uma função

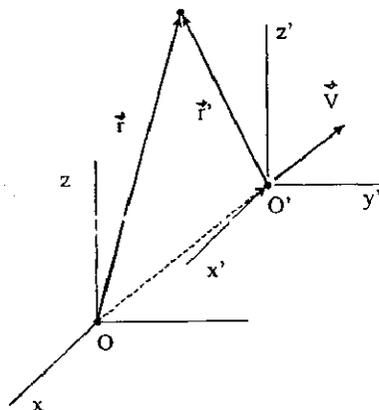
qualquer das coordenadas generalizadas. Para comprovarmos isto, mostremos que um termo do tipo $\alpha f(q, t)/dt$ não interfere no princípio de Hamilton.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q, t) dt &= \delta f(q, t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \delta f(q(t_2), t_2) - \delta f(q(t_1), t_1) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{12.30}$$

porque nos extremos t_1 e t_2 não há variação das coordenadas e, portanto,

$$\begin{aligned} \delta f(q(t_1), t_1) &= 0, \\ \delta f(q(t_2), t_2) &= 0. \end{aligned}$$

Figura 12.4: Partícula vista de referenciais inerciais diferentes.



Voltemos à Eq. (12.29). Pela invariância galileana, temos que $L(v^2)$ e $L(v'^2)$ devem satisfazer ao princípio de Hamilton. Isto só é possível se os termos do lado direito de (12.29), exceto o primeiro, puderem ser expressos como a derivada total em relação ao tempo de um função qualquer de \vec{r} e t . Realmente isto é possível se L for proporcional a v^2 , ou seja

$$L = \alpha v^2. \tag{12.31}$$

Então, de fato,

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{d}{dt} [\alpha (V^2 t - 2\vec{r} \cdot \vec{V})]. \tag{12.32}$$

E quanto à constante α ? Pelo princípio de Hamilton, temos também que a lagrangiana pode ser determinada a menos de uma constante multiplicativa. Então, a constante α da relação (12.31) pode ser, em princípio, qualquer uma (inclusive com qualquer dimensão).

Pense bem no seguinte: Estamos estudando agora o formalismo lagrangiano da mecânica clássica. Anteriormente, foi estudado o formalismo newtoniano. Imaginemos que tudo isto não tivesse ocorrido desta maneira, isto é, que estivéssemos nos deparando com o formalismo lagrangiano sem nunca termos ouvido falar da mecânica newtoniana. Os nossos únicos personagens, então, seriam coordenadas e velocidades generalizadas, lagrangiana, ação, princípio de Hamilton e equação de Euler-Lagrange. Não saberíamos, portanto, o que é massa, momento, energia (potencial, cinética e mecânica), força etc. Essas quantidades ou teriam de ser agora definidas ou outras teriam de ser introduzidas para ocuparem seus lugares, não necessariamente com as mesmas dimensões.

É claro que o caminho mais cômodo é aproveitar os conceitos já familiares da mecânica newtoniana, sempre que isto for possível. Assim, escolhemos a constante α como sendo $m/2$, onde m é a massa da partícula. Poderíamos escolher a relação (12.31) como relação de definição de massa. Mas, é claro, fica mais cômodo utilizar o conceito de massa que já temos da mecânica newtoniana. Assim, a lagrangiana da partícula livre é dada por

$$L = \frac{1}{2} m v^2. \tag{12.33}$$

Ou seja, a lagrangiana da partícula livre para o campo de atuação da mecânica newtoniana é a energia cinética. Embora não tenhamos visto surgir do formalismo lagrangiano o que é energia, nada impede de batizar a quantidade $m v^2/2$ de energia cinética. Veremos mais detalhes a respeito na Seção 4.

Há algo que falamos acima, mas que faltou ser explicado (e demonstrado), é sobre o fato de a velocidade ser constante para o caso da partícula livre. Esta condição de velocidade constante não foi usada em nenhum momento para obtenção da lagrangiana (12.33). Nós sabíamos isto da mecânica newtoniana, mas não do formalismo que estamos estudando. Podemos concluir que, realmente, a velocidade é constante para o caso da partícula livre usando a equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana dada por (12.33). Considerando a coordenada x , temos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{const.} \Rightarrow \dot{x} = \text{const.} \quad (12.34)$$

Analogamente, para as coordenadas y e z obteríamos, $\dot{y} = \text{const.}$ e $\dot{z} = \text{const.}$, o que nos faz concluir que para a partícula livre $\vec{v} = \text{const.}$ (atentar que não sabemos ainda o que é momento).

O que fizemos acima foi mostrar que podemos obter a lagrangiana da partícula livre apoiados apenas no princípio de Galileu. No caso de um sistema de partículas livres, temos vários argumentos para concluir que a lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2. \quad (12.35)$$

Um dos argumentos mais convincentes é que cada partícula pode ser considerada como um sistema isolado e, devido ao fato de não haver interação, a lagrangiana é uma quantidade aditiva.

A questão imediata agora é escrever a lagrangiana para o caso de haver interação. É importante mencionar que isto não pode ser feito somente usando os princípios de Hamilton e de Galileu. Já falamos bastante sobre isto. Para escrever a lagrangiana para o caso de haver interação, precisamos de informações sobre o tipo de interação. Já falamos também que a lagrangiana para o região de atuação da mecânica newtoniana é dada por

$$L = T - V, \quad (12.36)$$

onde V é a quantidade que detém as informações sobre o tipo de interação que a partícula (ou partículas) está sujeita. Esta quantidade tem a mesma dimensão de T . É, portanto, a nossa conhecida energia potencial. Como no caso da energia cinética, daremos mais detalhes sobre sua introdução na seção seguinte.

Voltemos à pergunta: Por que $T - V$ e não $T + V$, ou TV etc.? A resposta é simples. Com $T - V$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial, somos levados, com o uso da equação de Euler-Lagrange, às mesmas equações diferenciais obtidas a partir da utilização da segunda lei de Newton. Acho importante ressaltar que para o campo de atuação da mecânica newtoniana a lagrangiana é sempre $T - V$. Isto é bem vasto. Se a forma da lagrangiana dependesse de cada problema, o método que estamos apresentando não teria vantagem alguma.

Você poderia ainda (e com razão) fazer outra pergunta: Qual a vantagem de se estudar a mecânica newtoniana através do princípio de Hamilton do que através das leis de Newton? Inclusive, você poderá argumentar que já havia familiaridade com as leis de Newton e que, convenhamos, a utilização do princípio de Hamilton é bem mais artificioso.

Realmente, se fosse apenas para atuar no campo de ação onde a Mecânica Newtoniana já atua, não haveria vantagem ou argumentos, pelo menos convincentes, para introdução do novo formalismo. Deixe-me dizer que o princípio de Hamilton aplica-se à Física quase que de uma maneira geral. Além da Mecânica Newtoniana, aplica-se à Relatividade (geral e restrita) e ao Eletromagnetismo. Também aplica-se à Mecânica Quântica e à Teoria de Campos (através das integrais de caminho de Feynman e dos processos de quantização canônica). Assim, a Mecânica Newtoniana é apenas uma pequena parte onde o princípio de Hamilton pode atuar.

12.4 Leis de conservação

Antes de discutirmos mais exemplos práticos sobre a utilização da equação de Euler-Lagrange (que é, como já vimos, o resultado do princípio de Hamilton aplicado a um sistema onde as coordenadas generalizadas são independentes), vejamos como extrair leis de conservação através do presente formalismo.

Seja a equação de Euler-Lagrange para uma certa coordenada generalizada q_i [veja Eq. (12.6)]. Desta equação, podemos diretamente extrair uma lei de conservação. Se a coordenada q_i não aparece explicitamente na lagrangiana (dizemos que q_i é uma *coordenada cíclica*) temos que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.} \quad (12.37)$$

A quantidade $\partial L / \partial \dot{q}_i$ é, sem dúvida, uma quantidade importante pois, mediante certas condições, ela se conserva. Podemos escolher um nome qualquer para esta grandeza. Entretanto, como já tivemos oportunidade de falar, é aconselhável darmos aqui nomes que se assemelhem aos nomes dados a grandezas correspondentes da já conhecida Mecânica Newtoniana. Daí chamarmos a quantidade $\partial L / \partial \dot{q}_i$ de *momento generalizado conjugado à variável q_i* ou, simplesmente, *momento conjugado* ou, ainda, *momento canônico*. Veremos que quando q_i tem dimensão de comprimento $\partial L / \partial \dot{q}_i$ é o momento linear e quando tiver dimensão de ângulo, é um momento angular. Essas últimas afirmações ficarão claras nos exemplos que iremos discutir em breve. Então,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (12.38)$$

Observe bem como obtivemos a conservação do momento através do formalismo. Não falamos em força, porque isto estava ligado às leis de Newton (veremos mais tarde o conceito de força generalizada, aplicado ao que estamos desenvolvendo). Obtivemos a conservação do momento através de uma simetria da lagrangiana, pois, quando a lagrangiana não depende de uma certa coordenada q_i , ela apresenta uma simetria perante a ação desta variável. Mais especificamente, seja q_i um ângulo correspondente à rotação em torno de um eixo. Se esta coordenada for cíclica, podemos fazer uma rotação do sistema em torno do eixo correspondente que a sua lagrangiana continuará a mesma. Dizemos, assim, que a lagrangiana possui uma simetria de rotação. Em consequência desta simetria, o momento conjugado é conservado.

Vejamus uma outra lei de conservação. Seja a derivada em relação ao tempo da lagrangiana,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned} \quad (12.39)$$

onde, na segunda passagem acima, usamos a equação de Euler-Lagrange e, na última, a definição de momento [veja (12.38)]. Se a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, temos que $\partial L / \partial t = 0$ e, conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = 0 \Rightarrow \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \text{const.} \quad (12.40)$$

Outra quantidade que se conserva! Ou seja, quando a lagrangiana não depende do tempo explicitamente (tempo cíclico), a grandeza

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}), \quad (12.41)$$

que é chamada de *hamiltoniana*, se conserva. No caso em que V depende apenas das coordenadas generalizadas, temos que a Hamiltoniana é a conhecida energia total. Vejamus.

Lembremos a forma da energia cinética de um sistema de partículas em coordenadas cartesianas retangulares e em coordenadas esféricas,

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2), \quad (12.42)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a (r_a^2 \dot{\theta}_a^2 + r_a^2 \text{sen}^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2). \quad (12.43)$$

O índice a refere-se ao número de partículas do sistema.

Notamos que no caso das coordenadas esféricas, aparecem também as coordenadas generalizadas e não apenas as velocidades, como no caso das coordenadas cartesianas retangulares. De uma maneira geral, a energia cinética é quadrática nas velocidades generalizadas. Assim, podemos escrever a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (12.44)$$

Agora, os índices i e j referem-se ao número de coordenadas generalizadas. Considerando a expressão da hamiltoniana, temos

$$\begin{aligned} H &= \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \\ &= \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \right] - L \\ &= 2T - L = T + V, \end{aligned} \quad (12.45)$$

onde, na segunda passagem, usamos a definição de momento canônico e, depois, da energia cinética [dada por (12.44)].

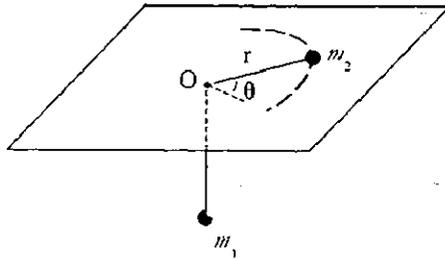
É claro que nem sempre a hamiltoniana tem esta forma. Ela só é igual a $T + V$ no caso do campo de atuação da mecânica newtoniana e quando V depende apenas das coordenadas generalizadas.

Só mais uma coisa, ao escrever a relação (12.36), onde introduzimos uma função escalar V e a chamamos de energia potencial, dissemos, na oportunidade, que daríamos mais detalhes posteriormente. Aí está. Podemos ver na relação (12.45) a motivação para isto. No caso de (12.36), não era claro que a função V , embora com dimensão de energia, pudesse ser a conhecida função energia potencial. Mas pela relação (12.45) não resta a menor dúvida. A quantidade conservada é a conhecida energia mecânica.

12.4.1 Um exemplo com duas partículas em interação

Sejam duas partículas de massas m_1 e m_2 , ligadas por um fio inextensível e de massa desprezível, como mostra a Figura 12.5. m_1 move-se no plano e m_2 move-se verticalmente. Todos os atritos são desconsiderados (este exemplo já foi estudado na Seção IX.3 com o uso do formalismo newtoniano).

Figura 12.5: Partículas em interação.



Há duas coordenadas generalizadas (r e θ). Chamando de b o comprimento do fio, temos

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2, \quad (12.46)$$

$$V = -m_2 g (b - r). \quad (12.47)$$

onde o plano foi considerado como o nível de energia potencial zero. Conseqüentemente,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + m_2 g (b - r). \quad (12.48)$$

Temos aqui dois caminhos a seguir. Um é escrever as equações de Euler-Lagrange para r e θ e resolver as equações diferenciais obtidas. A solução das equações diferenciais nem sempre pode ser feita, pelo menos com facilidade. Adiantemos que este é o caso. Um outro caminho interessante é através das possíveis constantes de movimento, de onde se podem obter várias informações sobre o problema. Vamos seguir este caminho.

A coordenada θ é cíclica. Logo, o momento canonicamente conjugado a θ é uma constante do movimento. Chamando esta quantidade de l , vem

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta}. \quad (12.49)$$

Este é o momento angular da partícula m_1 em relação ao ponto O . Uma outra constante do movimento é a energia total, pois a lagrangiana não depende explicitamente do tempo e o potencial só depende das coordenadas generalizadas. Chamando esta quantidade de E , temos,

$$E = T + V = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 - m_2 g (b - r). \quad (12.50)$$

Substituindo (12.49) em (12.50), encontramos,

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m_1 r^2} + m_2 g r - m_2 g b. \quad (12.51)$$

O termo $m_2 g b$ é constante. Podemos escrever a relação acima a menos deste termo. Isto corresponde a redefinir o nível zero da energia potencial. Assim, em lugar da última expressão, temos

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2 m_1 r^2} + m_2 g r, \quad (12.52)$$

onde $\tilde{E} = E + m_2 g b = \text{const.}$

Como podemos ver, as constantes dadas por (12.49) e (12.52) são as mesmas obtidas através do formalismo newtoniano (veja Seção 9.3). Daqui para a frente o procedimento é idêntico ao desenvolvido naquela oportunidade. Não vamos repeti-lo.

12.4.2 O problema de dois corpos

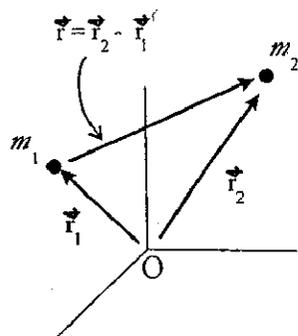
Também já vimos esta questão na Seção 9.3, mas é interessante desenvolvê-la usando o formalismo lagrangiano. O problema de dois corpos é o nome dado ao problema de duas partículas cuja energia potencial de interação depende apenas da distância entre elas. Há seis graus de liberdade e, portanto, seis coordenadas generalizadas independentes. Em termos dos vetores posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 (veja Figura 12.6), a lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - V(r), \quad (12.53)$$

onde $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Convenientemente, vamos expressar \vec{r}_1 e \vec{r}_2 através da posição do centro de massa (CM) (veja Figura 12.7). Assim, temos,

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} - \vec{r}_1' \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \vec{r}_2'\end{aligned}\quad (12.54)$$

Figura 12.6: Dois corpos em interação.



Substituindo (12.54) no termo de energia cinética em (12.53), encontramos

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2')^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2 \\ &\quad + \dot{\vec{R}} \cdot (m_1\dot{\vec{r}}_1' + m_2\dot{\vec{r}}_2').\end{aligned}\quad (12.55)$$

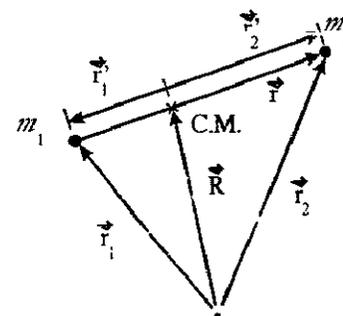
O termo $(m_1\dot{\vec{r}}_1' + m_2\dot{\vec{r}}_2')/(m_1 + m_2)$ dá a posição do CM mas em relação ao próprio CM. Então, $m_1\dot{\vec{r}}_1' + m_2\dot{\vec{r}}_2'$ é um vetor nulo (vem como sua derivada temporal). Com isto, a expressão da energia cinética fica

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2'^2. \quad (12.56)$$

O primeiro termo de (12.56) é a energia cinética do CM e os outros dois a energia cinética em relação ao CM. Isto não é novidade. Já tínhamos chegado a esta conclusão na Eq. (9.26), para um sistema de partículas.

Escrevamos, agora, \vec{r}_1' e \vec{r}_2' em termos de \vec{r} . Isto é possível devido às relações

Figura 12.7: Posição em relação do CM.



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_2' - \vec{r}_1', \\ m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' &= 0.\end{aligned}\quad (12.57)$$

Resolvendo este sistema, encontramos

$$\begin{aligned}\vec{r}_1' &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \\ \vec{r}_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.\end{aligned}\quad (12.58)$$

Substituindo estes valores em (12.55), vem

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2\dot{\vec{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2.\end{aligned}\quad (12.59)$$

Assim, a lagrangiana do sistema fica

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}). \quad (12.60)$$

Na Eq. (12.53), usamos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 como coordenadas generalizadas independentes. Aqui, estamos usando \vec{r} e \vec{R} . A escolha dessas últimas coordenadas apresenta uma vantagem importante, \vec{R} é cíclico. Isto significa que o momento do CM

e, conseqüentemente, a velocidade do CM é uma constante. Assim, o termo $(m_1 + m_2)\vec{R}^2/2$ é uma constante. Como uma quantidade constante qualquer somada à lagrangiana em nada afeta as equações de movimento, podemos desprezar o termo citado. Com isto, a relação da lagrangiana fica reduzida a

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r). \quad (12.61)$$

Esta expressão pode ser vista como a lagrangiana de uma partícula de massa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (12.62)$$

que é chamada de massa reduzida do sistema, sujeita a um potencial $V(r)$. O que fizemos é a chamada redução do problema de dois corpos ao problema de um corpo apenas. É fácil verificar que se uma das massas for muito grande, a massa reduzida é aproximadamente igual à outra massa.

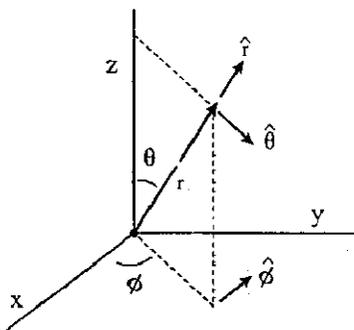
Então, passaremos a trabalhar com a lagrangiana dada pela relação (12.61). Temos, agora, três coordenadas generalizadas independentes. Sejam essas coordenadas as conhecidas coordenadas esféricas (veja Figura 12.8). Assim,

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (12.63)$$

Então,

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (12.64)$$

Figura 12.8: Coordenadas esféricas.



A coordenada ϕ é cíclica. Isto significa, conseqüentemente, que p_ϕ é constante,

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = \text{const.} \quad (12.65)$$

Acho oportuno fazer aqui um comentário. Lembrando da formulação newtoniana, temos que o movimento que estamos estudando é um movimento sob força central, logo o torque em relação ao centro de forças é sempre zero (\vec{r} e \vec{F} são vetores paralelos). Isto implica que o momento angular do sistema é constante e, conseqüentemente, o movimento é plano. Geralmente, os livros textos se valem deste argumento (dentro do formalismo newtoniano) para concluir que o movimento é plano. Naturalmente, devido à linha de raciocínio que estamos seguindo, isto, embora correto, não é satisfatório. As conclusões devem ser obtidas inteiramente dentro do novo formalismo.

Vejam como podemos concluir que o movimento é plano a partir da relação (12.65). Para isto, consideremos que os eixos coordenados possuam uma orientação tal que, num certo instante, $\theta = 0$. Isto implica, pela relação (12.65) que $p_\phi = 0$. Mas, como $p_\phi = \text{constante}$, temos que $p_\phi = 0$ sempre. Para que isto ocorra, ϕ deve ser nulo e, conseqüentemente, $\dot{\phi} = \text{constante}$, o que mostra que o movimento é realmente plano.

Assim (como o movimento é plano) trabalharemos com coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r), \quad (12.66)$$

onde o θ desta equação não é necessariamente o θ da Eq. (12.64).

Vamos usar, agora, o raciocínio desenvolvido no primeiro exemplo, isto é, através das constantes de movimento. Pela relação (12.66), temos que θ é cíclico, logo,

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante.} \quad (12.67)$$

Uma outra constante é a energia total

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r). \quad (12.68)$$

Com estas duas relações podemos obter as equações diferenciais do movimento e reduzir o problema a quadraturas, semelhantes às obtidas no primeiro exemplo. Vamos aqui eliminar a dependência temporal das relações (12.67) e (12.68) e obter uma quadratura para a trajetória.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V \right)} \frac{\mu r^2}{l} \quad (12.69)$$

Temos então,

$$\theta = \theta_0 + \frac{l}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V \right)}} \quad (12.70)$$

E, como sempre, a solução da integral fica na dependência do tipo de interação $V(r)$. Vamos aqui resolver o problema para o potencial do tipo $V = -k/r$ (o que corresponde à conhecida força de interação proporcional ao quadrado da distância). Este potencial é muito importante porque rege o movimento dos planetas. Assim, a relação (12.70) fica

$$\theta = \theta_0 - \frac{l}{\mu} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{l}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \right)}} \quad (12.71)$$

Não entraremos em detalhes quanto à solução desta equação. Isto já foi feito na Seção 8.4. O resultado final é

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\theta - \theta') \right] \quad (12.72)$$

A equação acima é do tipo

$$\frac{1}{r} = C [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta')], \quad (12.73)$$

que é a equação de uma cônica com um foco na origem. O tipo de cônica depende da excentricidade

$$\begin{aligned} \epsilon > 1, (E > 0) &: \text{hipérbole,} \\ \epsilon = 1, (E = 0) &: \text{parábola,} \\ \epsilon < 1, (E < 0) &: \text{elipse,} \\ \epsilon = 0, (E = -\frac{\mu k^2}{2l^2}) &: \text{círculo.} \end{aligned} \quad (12.74)$$

12.4.3 Partícula livre relativística

Acho interessante discutir agora, como exemplo, a obtenção da lagrangiana da partícula livre relativística. O ponto de partida será o mesmo do caso não relativístico, apresentado no início da Seção 3, ou seja, invariância em relação a observadores inerciais. Só que agora consideraremos transformadas de Lorentz em lugar das de Galileo. Naquela oportunidade, não fazia diferença entre considerar invariância da lagrangiana ou da ação, visto que o tempo é um invariante de acordo com as transformadas de Galileo. Na relatividade, por questões óbvias, deveremos ter como ponto de partida ação.

Uma quantidade invariante de Lorentz, envolvendo diretamente as coordenadas do espaço-tempo, é

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 \quad (12.75)$$

Fica como exercício mostrar que realmente ds é invariante para as transformações

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (12.76)$$

A quantidade ds é interpretada como sendo um elemento de linha (ou métrica) do espaço quadridimensional da relatividade especial (relatividade sem gravitação).

Assim, a ação da partícula livre relativística poderia ser proporcional à integral de qualquer potência de ds . Entretanto, como a ação é dada por uma integral simples, temos que a ação que estamos procurando deve ser do tipo

$$S = \alpha \int_1^2 ds, \quad (12.77)$$

onde α é uma constante a ser identificada. Usando (12.75), vamos colocar a expressão acima numa forma mais conveniente

$$S = \alpha \int_1^2 \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2} = \alpha c \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (12.78)$$

de onde podemos identificar a lagrangiana

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12.79)$$

Naturalmente, esta lagrangiana deve corresponder ao caso não relativístico para $v \ll c$. De fato, isto ocorre se $\alpha = -mc$. Assim, a lagrangiana que estamos procurando deve ser

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12.80)$$

Tendo construído a lagrangiana, podemos obter o momento da partícula relativística. Isto é conseguido diretamente com o uso da expressão do momento canônico dado por (12.38). Assim,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (12.81)$$

ou, de uma forma geral,

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.82)$$

Como a lagrangiana (12.80) não é função explícita do tempo, temos que hamiltoniana dar-nos-á a energia total. Assim, combinando (12.41) e (12.82), temos

$$\begin{aligned} E &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (12.83)$$

Como vemos, obtivemos as conhecidas expressões do momento e energia relativísticos da partícula livres a partir do formalismo lagrangiano e de argumentos sobre invariância para observadores inerciais (princípio de Galileu).

12.5 Poderíamos ir além, mas ...

Todos os exemplos vistos em Mecânica Newtoniana poderiam ser aqui descritos novamente. O procedimento seria sempre o mesmo, ou seja, escreveríamos a lagrangiana do sistema, calcularíamos a equação de Euler-Lagrange ou identificaríamos as constantes de movimento através das coordenadas cíclicas. Tanto num caso como no outro seríamos levados às mesmas equações diferenciais decorrentes da segunda lei de Newton ou dos princípios de conservação da energia mecânica ou momentos linear e angular. Daí em diante, tudo seria a mesma coisa, ou seja, teríamos de partir para a solução das equações ou (quando geralmente isto for muito difícil ou impossível) fazer uma análise do problema por outros meios, como pelas curvas de potencial.

Assim, continuar aplicando o formalismo lagrangiano pura e simplesmente acabaríamos sendo repetitivos com o que já foi estudado na Mecânica Newtoniana. Deixaremos exemplos sobre pequenas oscilações para serem tratados como exercícios. O corpo rígido será tratado no Capítulo 13, onde faremos um paralelo entre os formalismos newtoniano e lagrangiano. Aproveitaremos para ver mais detalhes sobre este assunto, mas nada que seja exclusivo do formalismo lagrangiano. Tudo o que será apresentado poderia, perfeitamente, ter sido feito no estudo da Mecânica Newtoniana.

O nosso objetivo nesta última seção será de apresentar algo que julgo bem mais interessante, que é a possibilidade de transição para a Mecânica Quântica através dos ingredientes do formalismo lagrangiano da Mecânica Clássica (algo que o formalismo newtoniano não permite com tanta facilidade). Adiantemos que a Mecânica Clássica permitirá visualizar outros caminhos para a Mecânica Quântica, conforme teremos oportunidade de falar em outras oportunidades.

Na Mecânica Quântica, não há o conceito de trajetória, isto é, não é possível, ou não faz sentido, descrever a evolução de uma partícula através de um vetor posição $\vec{r}(t)$, algo tão comum na Mecânica Newtoniana. No mundo quântico, existe um princípio fundamental, chamado *Princípio da incerteza de Heisenberg*, que sempre deve ser respeitado. Este princípio, apresentado em 1927, estabelece que momento e coordenada não podem ser conhecidos com precisão absoluta. A imprecisão entre ambos está relacionada por

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (12.84)$$

onde q_i e p_i são coordenadas canônicas e \hbar é a constante de Planck ($\hbar = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s) dividida por 2π . É importante frisar que esta relação vale sempre. Só que com massas grandes (comparativamente com a massa do

elétron) ela não é significativa. A constante h , introduzida por Planck em 1900 para explicar o problema da radiação do corpo negro, é o parâmetro que marca a escala do mundo quântico. Neste mundo, não se pode associar à partícula (algo como um elétron) um vetor posição para caracterizar o seu estado. Como vimos, isto não é compatível com o princípio da incerteza. O estado de uma partícula em Mecânica Quântica é dado por uma função complexa geralmente denotada por $\psi(\vec{r}, t)$, onde $\psi^* \psi dV$ representa a probabilidade de a partícula estar dentro do elemento de volume dV . A evolução quântica do sistema é dada olhando-se para a evolução da função ψ . Uma maneira de se obter isto é através da *Equação de Schrödinger* (1925), que é a forma mais usual em qualquer curso inicial de Mecânica Quântica (veja por exemplo Halliday-Resnick, vol. 4). Existe uma outra maneira, introduzida por Feynman em 1948, que não é muito popular nos cursos de graduação. Isto se deve, principalmente, à sua complexidade para tratar problemas simples, onde a Equação de Schrödinger é bem mais fácil de ser utilizada. Entretanto, adiantemos que na quantização dos campos (também conhecida como segunda quantização, ela é de extrema importância). O nosso objetivo aqui é mostrar em que se apoia o formalismo de Feynman, também chamado de *integrals de caminho*. Veremos que ficará bem claro o papel desempenhado pelo Princípio de Hamilton no mundo clássico. Acho que entenderemos melhor o seu significado.

Primeiramente, tomemos o conceito de *propagador* em Mecânica Quântica. Seja $\psi(\vec{r}, t)$ o estado de uma partícula no instante t . Podemos escrever que o estado no instante posterior t' , $\psi(\vec{r}', t')$, como

$$\psi(\vec{r}', t') = \int K(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) d^3\vec{r}. \quad (12.85)$$

onde $K(\vec{r}', t'; \vec{r}, t)$ é o propagador quântico da partícula e pode ser determinado com o uso da equação de Schrödinger. A idéia apresentada por Feynman em 1948 era de que o propagador quântico poderia ser obtido, sem usar a equação de Schrödinger, imaginando-se que uma partícula evoluiria entre dois estados seguindo todas as trajetórias possíveis. Ele postulou a seguinte relação

$$K(\vec{r}', t'; \vec{r}, t) = \sum_{\text{todas trajetórias}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \quad (12.86)$$

onde S é a ação correspondente a cada uma das trajetórias.

Não é nosso objetivo aqui ver como esta soma sobre todas as trajetórias é feita. O que queremos destacar é o formalismo quântico comparativamente com o caso clássico. Observe que a contribuição máxima do propagador ocorre

para a trajetória onde a ação é mínima. Esta é a ação clássica (Princípio de Hamilton). No caso de sistemas clássicos, a ação é muito grande perante \hbar ($\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$). Assim, variações da ação no entorno da ação clássica podem ser muito grandes relativamente a \hbar . Isto acarretará inúmeras oscilações no entorno de zero, o que não levará a contribuições para o propagador. Isto explica o fato de os sistemas clássicos apresentarem uma trajetória bem definida. No caso quântico, a ação clássica é da ordem de \hbar . Assim, outras trajetórias podem contribuir significativamente. Com isto, fica, de certa forma, patente a separação entre as físicas clássica e quântica. A física clássica corresponderia a fazer $\hbar \rightarrow 0$.

Um outro aspecto interessante encerrado na idéia de Feynman é que o princípio da incerteza de Heisenberg fica naturalmente embebido, pelo menos qualitativamente (pode ser mostrado que quantitativamente também), no fato de haver várias trajetórias possíveis para a evolução do sistema

Acho oportuno terminar esta seção e o presente capítulo fazendo menção ao diálogo que F.J. Dyson teve com Feynman, contado por Dyson no final da década de 70,

“Trinta e um ano atrás, Feynman contou-me sobre sua versão da mecânica quântica baseada na *soma sobre todas as trajetórias*. ‘O elétron vai para onde ele gosta’, disse. ‘Ele vai em qualquer direção com qualquer velocidade, para frente ou para trás, para qualquer lugar, e então você soma as amplitudes e ela dá a você a função de estado’. Eu disse a ele, ‘você está louco’. Mas ele não estava.”

► Exercícios

12.1. Calcular, no formalismo lagrangiano, a força de tensão do pêndulo simples.

12.2*. Considere uma partícula de massa m movendo-se na parte interna de uma superfície cônica, sem atrito (veja Figura 12.9). Identifique as grandezas conservadas e faça um estudo do movimento através das curvas de potencial.

12.3*. Repita o problema anterior considerando que a superfície seja uma semi-esfera de raio R .

12.4. Seja um certo corpo de raio a (pode ser uma esfera, um anel, um cilindro etc.), massa m e momento de inércia I (em relação ao eixo de rotação que passa pelo centro) rolando sobre um plano inclinado sem deslizar, como mostra

Figura 12.9: Exercício 2.

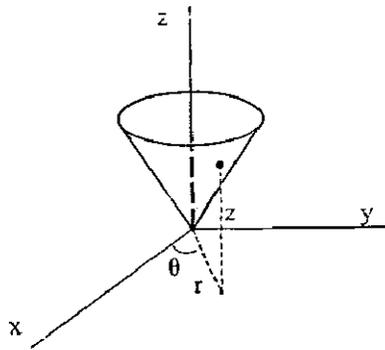
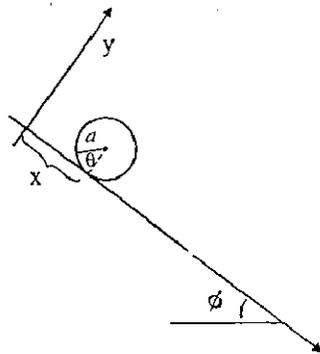


Figura 12.10: Exercício 4.



a) Figura 12.10. Calcular as forças de atrito e normal (através do formalismo lagrangiano é claro).

12.5. Mostre que a quantidade $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$ é um invariante de Lorentz.

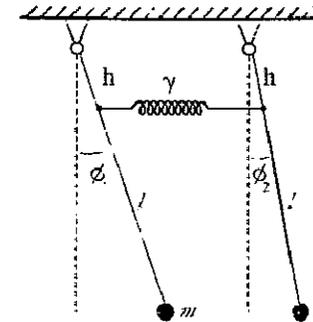
12.6. Mostre que a constante α da relação (12.79) vale realmente $-mc$.

12.7. A Figura 12.11 representa dois pêndulos acoplados. Considere que para $\phi_1 = \phi_2 = 0$ a mola não está esticada nem comprimida.

a) Calcular a lagrangiana do sistema para pequenas oscilações.

b) Calcular as equações de movimento e obter frequências normais de vibração. Interpretar o que significam os resultados.

Figura 12.11: Exercício 7.



12.8. Considere um sistema descrito pela lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \omega_0^2 (x^2 + y^2) + \alpha xy.$$

Ela corresponde a dois sistemas lineares idênticos de frequência própria ω_0 e ligados por uma interação $-\alpha xy$. Obtenha as equações de movimento e as frequências próprias.

12.9. Uma partícula de massa m está sujeita à seguinte energia potencial

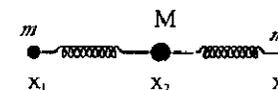
$$\bar{U} = \frac{1}{2} kr^2.$$

a) Explique porque o movimento deve ser plano.

b) Obtenha a trajetória da partícula.

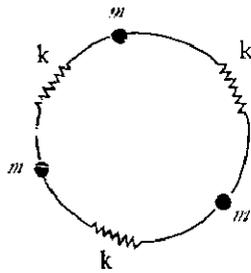
12.10. Seja uma "molécula" linear triatômica e simétrica cujos "átomos" estão dispostos como mostra a Figura 12.12. Obtenha a lagrangiana deste sistema, calcule as equações de movimento e as frequências normais de vibração. Interprete os resultados.

Figura 12.12: Exercício 10.



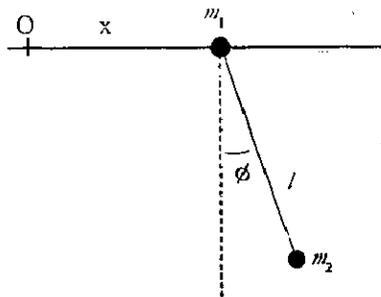
12.11. Três partículas de massa m estão vinculadas a se moverem sobre um círculo e presas uma às outras através de molas de constante k , como mostra a Figura 12.13. Considere que na posição de equilíbrio as molas não estejam esticadas nem comprimidas e que as distâncias entre as partículas sejam iguais. Obtenha a lagrangiana do sistema, as equações de movimento e frequências normais de vibração.

Figura 12.13: Exercício 11.



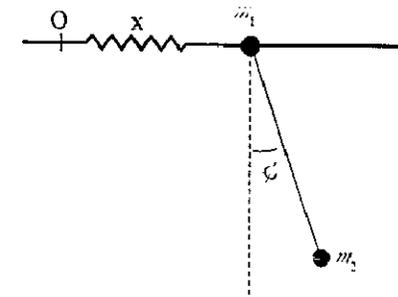
12.12*. Ache a frequência para pequenas oscilações do pêndulo mostrado na Figura 12.14, onde o ponto de suspensão (massa m_1) pode mover-se sobre uma reta horizontal.

Figura 12.14: Exercício 12.



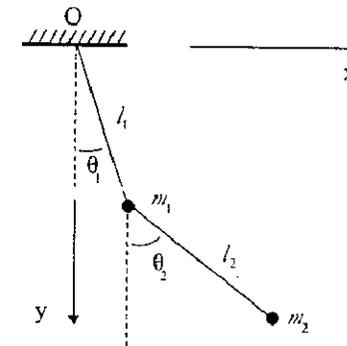
12.13. Considere o mesmo caso geral do problema anterior, mas com m_1 preso a uma mola de constante k , como mostra a Figura 12.15)

Figura 12.15: Exercício 13.



12.14. Calcule as frequências para pequenas oscilações do pêndulo composto mostrado na Figura 12.16.

Figura 12.16: Exercício 14.



12.15. Achar a frequência de oscilação de um ponto de massa m , vinculado a se mover sobre uma reta e preso a uma mola cuja outra extremidade é fixa num ponto A (veja Figura 12.17). Este ponto está a uma distância l da reta. É dado também que o comprimento de repouso da mola (l_0) é menor que l .

12.16. Considere a mesma situação do problema anterior mas com a massa m vinculada a se mover sobre um círculo de raio R (veja Figura 12.18).

12.17*. Duas partículas movem-se num plano (xy) e são unidas por uma haste de comprimento l . Elas são vinculadas a se mover de tal maneira que a velocidade

Figura 12.17: Exercício 15.

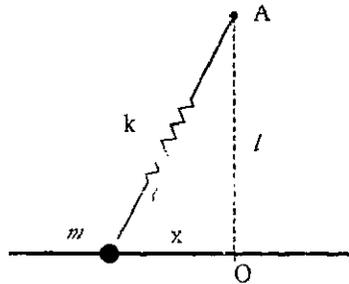
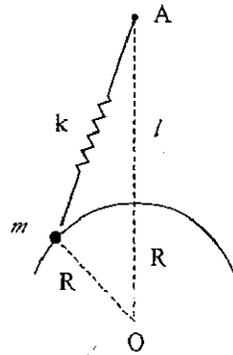


Figura 12.18: Exercício 16.



do meio da haste é sempre na direção da haste. Obtenha as equações de vínculo do problema.

CAPÍTULO 13

Corpo rígido - Parte II

Este capítulo complementa o Capítulo 10, que foi desenvolvido através do formalismo newtoniano. Faremos aqui o tratamento lagrangiano e desenvolveremos alguns tópicos mais formal e profundamente, principalmente no que concerne às rotações dos eixos coordenados.

13.1 Graus de liberdade do corpo rígido

O corpo rígido é um tipo de sistema com vínculos onde a distância entre dois quaisquer de seus pontos é constante.

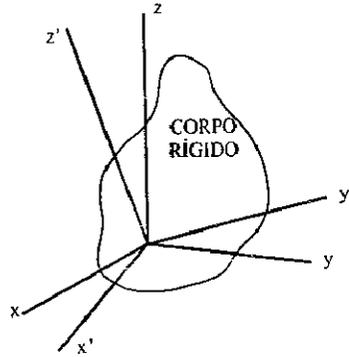
Para determinar o número de graus de liberdade de um corpo rígido, tomamos, inicialmente, um de seus pontos (três graus de liberdade), o qual não fixa a sua posição no espaço, pois ele ainda tem a liberdade de rotação em relação a este ponto. Tomando, então, um outro ponto do corpo rígido (mais dois graus de liberdade, pois há um vínculo entre este ponto e o outro porque a distância entre eles é constante e isto diminui um dos graus de liberdade), ainda não conseguimos ter uma localização do corpo rígido no espaço, porque resta liberdade de rotação em torno do eixo que passa pelos dois pontos. Isto é, ainda há um grau de liberdade. Assim, concluímos que o corpo rígido possui ao todo seis graus de liberdade.

Podemos escolher para coordenadas generalizadas independentes, referentes a esses seis graus de liberdade, três coordenadas espaciais para localização de um ponto do corpo rígido e mais três ângulos para localização da orientação do corpo rígido em relação a este ponto. Nesta última parte, geralmente são usados os *ângulos de Euler* (que foram introduzidos no Capítulo 10).

Vamos revisar o problema da rotação do corpo rígido. Aproveitaremos e iremos um pouco mais além do que o tratamento feito no Capítulo 10.

Consideremos um sistema de eixos preso ao corpo e cuja origem é o ponto em relação ao qual estamos considerando o movimento de translação. Seja também um outro sistema de eixos com a mesma origem do sistema anterior, mas que, diferentemente dele, não roda com o corpo rígido. Veja a Figura 13.1, onde (x', y', z') é o sistema fixo ao corpo e (x, y, z) é o sistema que não roda.

Figura 13.1: Orientação do corpo rígido.



A orientação do corpo rígido é dada pela orientação do sistema (x', y', z') em relação ao sistema (x, y, z) . É isto que vamos desenvolver agora. Para tal, seja um vetor \vec{V} referido aos dois eixos. Para facilitar a notação, chamemos os eixos de (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) (veja Figura 13.2). Assim, o vetor \vec{V} referido ao sistema sem linha é expresso por

$$\vec{V} = V_1 \hat{e}_1 + V_2 \hat{e}_2 + V_3 \hat{e}_3. \quad (13.1)$$

Em relação ao sistema com linha, temos

$$\vec{V} = V'_1 \hat{e}'_1 + V'_2 \hat{e}'_2 + V'_3 \hat{e}'_3, \quad (13.2)$$

ou, compactamente,

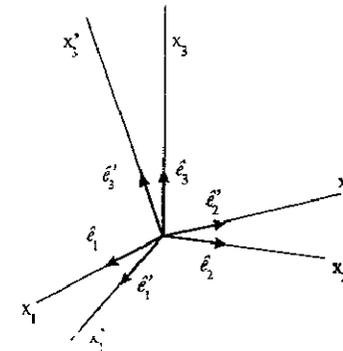
$$\vec{V} = \sum_{i=1}^3 V_i \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 V'_j \hat{e}'_j. \quad (13.3)$$

A partir desta expressão, podemos obter o relacionamento entre as componentes do vetor \vec{V} no referencial com linha em termos das componentes no referencial sem linha. Para tal, basta escrever os unitários de um sistema em

relação aos unitários do outro. Antes, porém, vamos introduzir uma convenção muito útil. Conforme teremos oportunidade de ir observando, os índices de soma sempre aparecem aos pares. Assim, não há necessidade de ficar escrevendo o sinal de somatório, pois o índice dobrado já significa que se está somando naquele índice. Este procedimento é chamado de *convenção de Einstein* (veja no Apêndice B a utilização desta convenção em várias demonstrações de identidades vetoriais). Com isto, a relação (13.3) é escrita simplesmente como

$$\vec{V} = V_i \hat{e}_i = V'_j \hat{e}'_j. \quad (13.4)$$

Figura 13.2: Sistemas de eixos e unitários.



Escrevendo os unitários \hat{e}_i em termos dos unitários \hat{e}'_j , temos (para deixar bem claro, vamos considerar cada unitário separadamente)

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1) \hat{e}'_1 + (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2) \hat{e}'_2 + (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_3) \hat{e}'_3 \\ \hat{e}_2 &= (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1) \hat{e}'_1 + (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2) \hat{e}'_2 + (\hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_3) \hat{e}'_3 \\ \hat{e}_3 &= (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_1) \hat{e}'_1 + (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_2) \hat{e}'_2 + (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_3) \hat{e}'_3. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Compactamente, podemos escrever todas estas relações como

$$\hat{e}_i = (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j) \hat{e}'_j. \quad (13.6)$$

Lembrar de que se está somando em j e que $i = 1, 2, 3$. O termo $\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j$ é o cosseno do ângulo entre os unitários \hat{e}_i e \hat{e}'_j . Substituindo \hat{e}_i dado por (13.6) em (13.4), temos

$$\vec{V} = V_i(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j) \hat{e}'_j = V'_j \hat{e}'_j \quad (13.7)$$

(No lado esquerdo estamos somando em i e j e no lado direito apenas em j .) Como os unitários são linearmente independentes, vem

$$V'_j = (\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_j) V_i \Rightarrow V'_i = (\hat{e}_j \cdot \hat{e}'_i) V_j \Rightarrow V'_i = R_{ij} V_j, \quad (13.8)$$

onde

$$R_{ij} \equiv \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j. \quad (13.9)$$

Como podemos ainda não ter muita familiaridade com esta notação compacta, vamos reescrever os termos da expressão (13.8) explicitamente,

$$\begin{aligned} V'_1 &= R_{11} V_1 + R_{12} V_2 + R_{13} V_3, \\ V'_2 &= R_{21} V_1 + R_{22} V_2 + R_{23} V_3, \\ V'_3 &= R_{31} V_1 + R_{32} V_2 + R_{33} V_3, \end{aligned} \quad (13.10)$$

que pode ser colocada na forma matricial usual [se bem que a forma matricial já estava patente na relação (13.8)]

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad (13.11)$$

ou ainda,

$$V' = R V, \quad (13.12)$$

onde V' e V são matrizes colunas e R é uma matriz quadrada. A matriz R é vista como um operador que dá a rotação do sistema sem linha para o sistema com linha. Esta matriz pode ser expressa em termos dos ângulos de Euler.

O conceito de multiplicação de matrizes surge aqui de uma maneira muito natural [se bem que ele já foi introduzido em parte para escrever a relação

(13.11)]. Consideremos que após aplicar a matriz R para obter V' aplicamos S em V' para obter V'' ,

$$V'' = S V' = S R V = G V. \quad (13.13)$$

A matriz $G = S R$ é o operador que atuando em V dá-nos V'' (é imediato observar que $S R$ não é necessariamente igual a $R S$). Vejamos a forma deste operador em termos das componentes de R e S

$$V''_i = S_{ij} V'_j = S_{ij} R_{jk} V_k = G_{ik} V_k \Rightarrow G_{ik} = S_{ij} R_{jk}, \quad (13.14)$$

que é a conhecida regra de multiplicação matricial.

Dos nove elementos da matriz de rotação, nem todos são independentes. Como já dissemos, apenas três ângulos são necessários para dar a localização de um referencial em relação ao outro. Portanto, deve haver seis equações de vínculo envolvendo os nove elementos da matriz. Essas relações de vínculo são facilmente obtidas a partir do fato de que o módulo do vetor deve ser o mesmo em relação a qualquer um dos sistemas de coordenadas. Isto é

$$V'_i V'_i = V_j V_j. \quad (13.15)$$

Usando a relação (13.8), temos

$$V'_i V'_i = R_{ij} V_j R_{ik} V_k = R_{ij} R_{ik} V_j V_k. \quad (13.16)$$

A combinação de (13.15) e (13.16) fornece a expressão procurada

$$R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}, \quad (13.17)$$

onde as quantidades δ_{jk} constituem o *delta de Kronecker* que é definido da seguinte maneira

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (13.18)$$

A relação (13.17) é chamada *condição de ortogonalidade* e corresponde a seis equações independentes envolvendo os coeficientes R_{ij} (três para $j = k$ e três para $j \neq k$). Entã, os elementos da matriz de rotação podem ser escritos, realmente, em termos de apenas três ângulos. Na verdade, há uma infinidade de conjuntos de três ângulos que podem ser usados para escrever esta matriz, mas os comumente usados são os *ângulos de Euler*.

Vamos rever os ângulos de Euler. Antes, porém, aproveitemos a oportunidade para mostrar que a condição de ortogonalidade dada por (13.17) está ligada ao conceito usual de matriz ortogonal. Seja uma matriz O ortogonal,

$$\tilde{O}O = O\tilde{O} = 1. \tag{13.19}$$

Em termos de elementos de matriz, temos

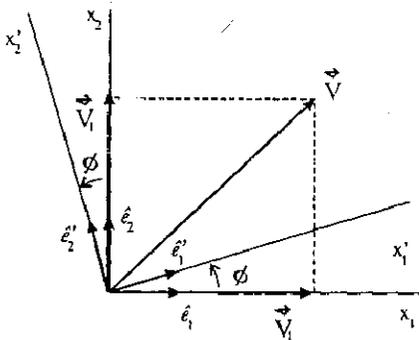
$$O\tilde{O} = 1 \Rightarrow O_{ij}\tilde{O}_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow O_{ij}O_{kj} = \delta_{ik} \tag{13.20}$$

$$\tilde{O}O = 1 \Rightarrow \tilde{O}_{ij}O_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow O_{ji}O_{jk} = \delta_{ik}. \tag{13.21}$$

Portanto, olhando para (13.17), vemos que a matriz R é ortogonal. Ela produz a chamada *transformação ortogonal*. Então, em resumo, as rotações dos sistemas de coordenadas são feitas por transformações ortogonais.

Vamos introduzir os ângulos de Euler de forma semelhante à já feita no Capítulo 10. Assim, não vamos apresentar muitos detalhes, apenas adaptaremos à convenção adotada aqui. Consideremos uma rotação ϕ em torno do eixo z no sentido anti-horário. A Figura 13.3 mostra a situação descrita, onde \vec{V}_1 e \vec{V}_2 são componentes de um vetor \vec{V} nos eixos x_1 e x_2 .

Figura 13.3: Rotação anti-horária em torno do eixo z .



Projetando o vetor \vec{V}_1 nos eixos x'_1 e x'_2 , temos

$$\vec{V}_1 = V_1 \cos \phi \hat{e}'_1 - V_1 \sin \phi \hat{e}'_2. \tag{13.22}$$

Fazendo o mesmo para \vec{V}_2 , temos

$$\vec{V}_2 = V_2 \sin \phi \hat{e}'_1 + V_2 \cos \phi \hat{e}'_2. \tag{13.23}$$

Assim, combinando essas duas relações, temos

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (V_1 \cos \phi + V_2 \sin \phi) \hat{e}'_1 + (V_2 \cos \phi - V_1 \sin \phi) \hat{e}'_2, \tag{13.24}$$

o que permite as identificações

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \cos \phi + V_2 \sin \phi. \\ V'_2 &= -V_1 \sin \phi + V_2 \cos \phi. \end{aligned} \tag{13.25}$$

Em termos matriciais e tendo em conta que $V'_3 = V_3$, temos

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}. \tag{13.26}$$

A forma das matrizes no caso de as rotações (também anti-horárias) serem em torno dos eixos x e y são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \tag{13.27}$$

Um sistema de eixos pode ser colocado na forma mais geral possível através de três rotações sucessivas em torno de eixos particulares. Os ângulos de Euler (ϕ , θ e ψ) correspondem às seguintes rotações (caso seja necessário, veja a Figura 10.22 para uma visualização destes ângulos)

$$(x, y, z) \xrightarrow{A(\phi)} (\xi, \eta, \zeta) \xrightarrow{B(\theta)} (\xi', \eta', \zeta') \xrightarrow{C(\psi)} (x', y', z')$$

$$z = \zeta \qquad \xi' = \xi \qquad z' = \zeta'.$$

Observando (13.26) e (13.27), diretamente escrevemos as matrizes que produzem estas rotações

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 C &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.28)
 \end{aligned}$$

A matriz geral de rotação, que chamaremos de R , é dada por

$$R = CBA,$$

ou explicitamente como

$$\begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (13.29)$$

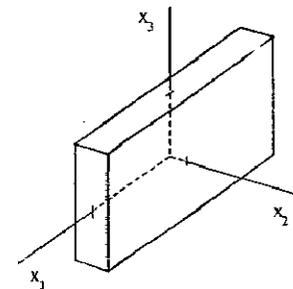
Estes são os ingredientes necessários para o estudo da rotação do corpo rígido, como já tínhamos apresentado no Capítulo 10. Antes de dar continuidade (agora, através do formalismo lagrangiano), vamos aproveitar a oportunidade para desenvolver dois estudos (apresentados nas duas seções seguintes) que serão de grande importância, não apenas no âmbito da Mecânica Clássica.

13.2 Vetores e tensores

A primeira noção intuitiva que nos é dada sobre vetores é que são quantidades caracterizadas por possuírem módulo, direção e sentido (veja também Apêndice B). Realmente isto é verdade, mas o inverso não. Nem tudo que possui módulo, direção e sentido é um vetor! Um exemplo imediato sobre isto são as rotações. Podemos associar às rotações um módulo (valor do ângulo de rotação), uma direção (eixo de rotação) e um sentido (rotação para a direita ou para a esquerda). Apesar de as rotações possuírem módulo, direção e sentido elas não são vetores. Isto deve-se a um fato simples: as rotações (finitas)

não satisfazem uma propriedade básica da soma vetorial, que é a comutatividade. Seja um exemplo. Tomemos um corpo rígido cuja forma e posição estão mostrados na Figura 13.4

Figura 13.4: Corpo rígido que será rodado.



Consideremos duas rotações de 90° . A primeira em torno de x_1 e a segunda em torno de x_2 . Sejam ambas as rotações efetuadas no sentido anti-horário. A Figura 13.5 mostra os resultados dessas duas rotações.

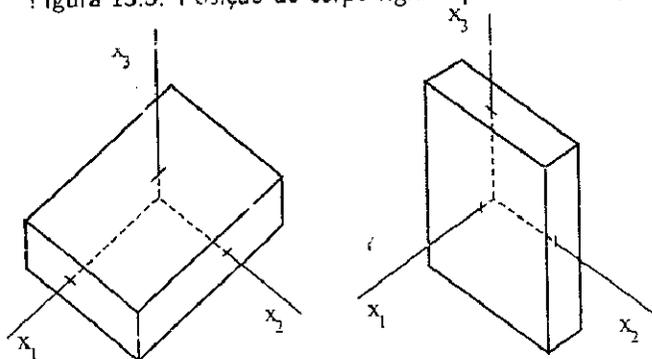
Se essas rotações forem vetores ($\vec{\theta}_1$ e $\vec{\theta}_2$) deveremos ter $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$, o que significa fazer as rotações em ordem inversa e obter o mesmo resultado. A Figura 13.6 mostra as rotações na ordem inversa. Fica patente que, num caso geral, as rotações finitas, apesar de possuírem módulo, direção e sentido, não podem ser vetores. Este resultado, de certa forma, já estava claro desde o início. Estamos estudando as rotações como sendo produzidas por operadores matriciais e, como sabemos, o produto matricial não é comutativo de um modo geral.

É fácil mostrar que se as rotações forem infinitesimais não teremos mais este problema, isto é, duas rotações infinitesimais independem da ordem em que são realizadas. Para vermos isto, não usaremos figuras como no caso de rotações finitas, pois não seria confiável chegar à alguma conclusão. Usaremos diretamente as matrizes de rotação.

É claro que uma matriz produzindo uma rotação muito pequena não deve diferir muito da matriz identidade. Assim, considerando que a matriz P da relação (13.11) produza uma rotação infinitesimal, podemos escrever

$$V' = (\mathbf{1} + d\Omega) V, \quad (13.30)$$

Figura 13.5: Posição do corpo rígido após duas rotações.



onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade e $d\Omega$ a matriz que contém os ângulos infinitesimais de rotação. Sejam duas rotações infinitesimais sucessivas caracterizadas por matrizes $d\Omega$ e $d\Omega'$, isto é,

$$\begin{aligned} V'' &= (\mathbf{1} + d\Omega)(\mathbf{1} + d\Omega') V \\ &= (\mathbf{1} + d\Omega + d\Omega' + d\Omega' d\Omega) V. \end{aligned} \quad (13.31)$$

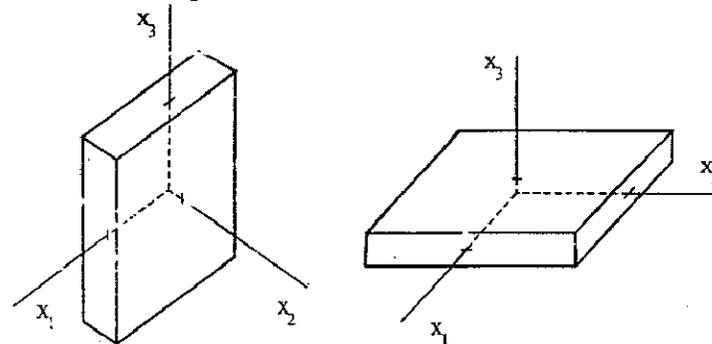
Como as rotações são infinitesimais, o produto matricial $d\Omega' d\Omega$ dá-nos uma matriz cujos elementos são infinitesimos de ordem superior aos infinitesimos de $d\Omega$ e $d\Omega'$. Assim, a relação acima fornece aproximadamente

$$V'' = (\mathbf{1} + d\Omega + d\Omega') V. \quad (13.32)$$

Pela relação (13.32), vemos claramente que duas rotações infinitesimais são comutativas. E agora? São as rotações infinitesimais vetores? Isto é, se o ângulo ϕ da relação (13.26) fosse infinitesimal (chamemo-lo de $d\phi$), poderíamos representar $d\vec{\phi} = d\phi \hat{e}_3$? Vamos responder esta pergunta nos desenvolvimentos a seguir.

Primeiramente, é fácil ver que a matriz $d\Omega$ é antisimétrica. Como $R = \mathbf{1} + d\Omega$, temos $\tilde{R} = \mathbf{1} + d\tilde{\Omega}$. Mas, $R^{-1} = \mathbf{1} - d\Omega$, verificado diretamente de $(\mathbf{1} + d\Omega)(\mathbf{1} - d\Omega) = \mathbf{1}$. Logo, como R é ortogonal, $\tilde{R} = R^{-1}$, temos $d\tilde{\Omega} = -d\Omega$. Por exemplo, a matriz A da relação (13.26) pode ser escrita como

Figura 13.6: Rotações em ordem inversa.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.33)$$

De uma maneira geral, teríamos

$$d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.34)$$

onde os sinais relativos + e - foram colocados convenientemente. Assim, da relação (13.30), podemos escrever

$$\begin{pmatrix} dV_1 \\ dV_2 \\ dV_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}, \quad (13.35)$$

o que nos fornece as equações

$$\begin{aligned} dV_1 &= d\Omega_2 V_3 - d\Omega_3 V_2, \\ dV_2 &= d\Omega_3 V_1 - d\Omega_1 V_3, \\ dV_3 &= d\Omega_1 V_2 - d\Omega_2 V_1. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Podemos escrevê-las compactamente como

$$dV_i = \epsilon_{ijk} d\Omega_j V_k \quad (13.37)$$

$$\Rightarrow d\vec{V} = d\vec{\Omega} \times \vec{V} \quad (13.38)$$

(no lado direito da primeira expressão acima está-se somando em j e k). As quantidades ϵ_{ijk} constituem o *tensor de Levi-Civita*, que é definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ permutação cíclica } 1, 2, 3 \\ -1 & \dots \text{ não cíclica de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{dois ou mais índices iguais} \end{cases} \quad (13.39)$$

A relação (13.38) mostra que $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ e $d\Omega_3$ aparecem numa relação vetorial e sua representação gráfica pode ser vista na Figura 13.7. É isto então suficiente para dizer que $d\vec{\Omega} = (d\Omega_1, d\Omega_2, d\Omega_3)$ é um vetor? Aparentemente sim, mas para responder com mais convicção, temos de ver o que vem a ser realmente um vetor (o que ainda não vimos). Não há dúvidas de que, matematicamente, podemos chegar a esta resposta através dos conceitos de espaço vetorial etc. Mas, para os nossos objetivos aqui, onde queremos simplesmente saber se certas quantidades são ou não vetores, não precisamos ser tão rigorosos. Dentro do que estamos estudando, podemos identificar os vetores como sendo quantidades que numa rotação do sistema de coordenadas transformam-se da maneira representada pela relação (13.8), com os elementos R_{ij} satisfazendo à condição de ortogonalidade (13.17). Note bem que isto não é exatamente a definição de vetor, é apenas algo que nos permite identificar o que é e o que não é um vetor. Assim, se $d\vec{\Omega}$ for um vetor, deveremos ter, numa rotação qualquer, $d\Omega'_i = R_{ij} d\Omega_j$. Verifiquemos, então, se isto realmente ocorre. A relação (13.37), escrita no sistema com linha, seria

$$dV'_i = \epsilon_{ijk} d\Omega'_j V'_k. \quad (13.40)$$

Considerando R a matriz de rotação que faz passar do sistema sem linha para o sistema com linha, temos, já que \vec{V} e $d\vec{V}$ são vetores (por hipótese),

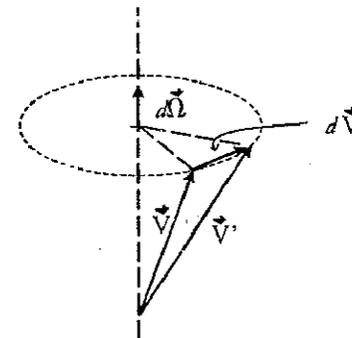
$$\begin{aligned} R_{il} dV_l &= \epsilon_{ijk} d\Omega'_j R_{kn} V_n \\ \Rightarrow R_{il} \epsilon_{lmn} d\Omega_m V_n &= \epsilon_{ijk} d\Omega'_j R_{kn} V_n, \end{aligned} \quad (13.41)$$

onde na segunda passagem acima usou-se (13.37). Como as componentes de \vec{V} são quantidades independentes, podemos concluir que

$$R_{il} \epsilon_{lmn} d\Omega_m = \epsilon_{ijk} d\Omega'_j R_{kn}. \quad (13.42)$$

O nosso objetivo agora será explicitar o $d\Omega'_j$. Primeiramente, multipliquemos ambos os lados de (13.42) por R_{pn} e usemos a condição de ortogonalidade (13.17). Assim,

Figura 13.7: Representação gráfica de $d\vec{\Omega}$.



$$\begin{aligned} R_{pn} R_{il} \epsilon_{lmn} d\Omega_m &= \epsilon_{ijk} d\Omega'_j R_{kn} R_{pn} \\ \Rightarrow R_{pn} R_{il} \epsilon_{lmn} d\Omega_m &= \epsilon_{ijk} d\Omega'_j \delta_{kp} \\ \Rightarrow R_{pn} R_{il} \epsilon_{lmn} d\Omega_m &= \epsilon_{ijp} d\Omega'_j. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Para retirar o ϵ_{ijp} que está na frente do $d\Omega'_j$, fazemos uso da identidade (veja Apêndice B)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kim} = \delta_{ii} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{ji}. \quad (13.44)$$

Multipliquemos, então, ambos os lados da expressão (13.43) por ϵ_{pki} ,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijp} \epsilon_{pki} d\Omega'_j &= R_{pn} R_{il} \epsilon_{lmn} \epsilon_{pki} d\Omega_m \\ \Rightarrow (\delta_{ik} \delta_{ji} - \delta_{ii} \delta_{jk}) d\Omega'_j &= R_{pn} R_{il} \epsilon_{lmn} \epsilon_{ips} \delta_{sk} d\Omega_m \\ \Rightarrow -2\delta_{jk} d\Omega'_j &= R_{il} R_{pn} \epsilon_{lmn} \epsilon_{ips} R_{st} R_{kt} d\Omega_m \\ \Rightarrow d\Omega'_k &= -\frac{1}{2} R_{il} R_{pn} R_{st} \epsilon_{ips} \epsilon_{lmn} R_{kt} d\Omega_m \\ &= -\frac{1}{2} \det R \epsilon_{lnt} \epsilon_{lmn} R_{kt} d\Omega_m \\ &= -\frac{1}{2} \det R (-2\delta_{tm}) R_{kt} d\Omega_m \\ &= \det R R_{tm} d\Omega_m, \end{aligned} \quad (13.45)$$

onde na antepenúltima passagem acima usamos a relação

$$R_{st}R_{pn}R_{st}\epsilon_{ips} = \epsilon_{int} \det R, \quad (13.46)$$

que é facilmente verificada tendo em conta a definição de determinante, juntamente com a definição do tensor de Levi-Civita.

Observando as relações (13.8) e (13.45) vemos que $d\vec{\Omega}$ não se transforma exatamente como um vetor. Existe um fator $\det R$. Vejamos, então, sobre o valor do determinante de R . Como R é uma matriz ortogonal, temos

$$\begin{aligned} \tilde{R}R = I &\Rightarrow \det(\tilde{R}R) = 1 \Rightarrow \det \tilde{R} \det R = 1 \\ &\Rightarrow (\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1, \end{aligned} \quad (13.47)$$

$\det R = -1$ corresponde ao caso da transformação de paridade (inversão dos eixos coordenados: $x'_i = -x_i$). Esta transformação, embora seja ortogonal, não pode ser obtida através de rotações dos eixos coordenados. Assim, $\det R = +1$ corresponde ao caso das rotações propriamente ditas. Então, para o caso das rotações, a relação (13.45) coincide com (13.8), mas para o caso das inversões de eixos (transformação de um sistema dextrogiro para um levogiro), isto não acontece. Por este motivo, $d\vec{\Omega}$ é chamado de *pseudovetor* ou *vetor axial*. Na verdade, muitas das quantidades que em física designamos por vetores são pseudovetores. Temos, como exemplos, o momento angular e o torque. Na inversão de eixos, um pseudovetor não muda de sinal. Assim, se \vec{a} e \vec{b} são vetores, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ é um pseudovetor!

Um ponto importante sobre o que acabamos de ver consiste na possibilidade de generalização do conceito de vetor. Relembrando, vetores são quantidades V_i 's que numa rotação ou inversão de eixos transformam-se da seguinte maneira:

$$V'_i = R_{ij}V_j, \quad (13.48)$$

com a condição de ortogonalidade (13.17) satisfeita. Podemos definir quantidades T_{ij} , T_{ijk} etc., cujas transformações são generalizações imediatas de (13.48), isto é,

$$T'_{ij} = R_{ik}R_{jl}T_{kl}, \quad (13.49)$$

$$T'_{ijk} = R_{il}R_{jm}R_{kn}T_{lmn}. \quad (13.50)$$

Estas quantidades são chamadas de *tensores*. No caso, T_{ij} é um tensor de segunda ordem e T_{ijk} de terceira ordem. Particularmente, um vetor é um tensor de primeira ordem e um escalar, um tensor de ordem zero.

Há várias quantidades físicas expressas através de tensores. O tensor de inércia, como já vimos no Capítulo 10, é uma delas.

13.3 Parâmetros de Cayley-Klein

Este é um outro assunto interessante e que mostra a possibilidade de se estudar rotações no espaço tridimensional real, através de operadores matriciais bidimensionais. O fundamento matemático rigoroso do que será apresentado está na chamada *Teoria de Grupos*. Considero oportuna a maneira como vamos tratar aqui este assunto pois, mais tarde, quando vocês estudarem teoria de grupos, mais especialmente o grupo das rotações, muita coisa já será familiar. O nosso objetivo também é de tornar familiar alguns dos ingredientes que serão vistos nos cursos de Mecânica Quântica, principalmente no tocante ao estudo de spin.

Consideremos que a cada rotação do \mathbb{P}^3 , realizada por matrizes que chamaremos de R , corresponda a uma transformação no espaço complexo \mathbb{Z}^2 , realizadas por matrizes que chamaremos de Q (daqui a pouco falaremos sobre que transformação é esta), tal que qualquer relação entre as matrizes R 's corresponda uma relação semelhante entre as matrizes Q 's. Quando isto acontece, dizemos que os conjuntos de matrizes R 's e Q 's são *isomórficos*. A Figura 13.8 mostra um diagrama onde esclarece de uma maneira mais geral esta propriedade de isomorfismo.

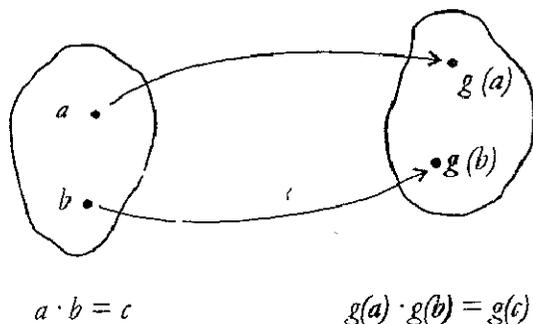
Em teoria de grupo dizemos que o conjunto das matrizes R 's e o conjunto das matrizes Q 's são representações isomórficas de uma mesma coisa, chamada *grupo de rotações*. Como já vimos, as matrizes R 's são ortogonais e, no caso das rotações, $\det R = 1$. As matrizes Q 's devem também satisfazer a certas propriedades a fim de que o conjunto dessas matrizes seja isomorfo ao anterior.

Representemos genericamente as matrizes Q 's por

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (13.51)$$

onde α , β , γ e δ são chamados de *parâmetros de Cayley-Klein*. Eles foram introduzidos por *Felix Klein* para facilitar as integrações do complicado problema do giroscópio. Essas quantidades são complexas. Portanto, ao todo, temos as matrizes Q 's dadas em termos de oito parâmetros. É claro que nem todas essas quantidades podem ser independentes. No caso das matrizes reais R 's, tínhamos nove parâmetros. Em virtude de elas serem ortogonais, apenas três eram independentes, que os escrevemos através dos ângulos de Euler. As-

Figura 13.8: Isomorfismo.



sim, as matrizes Q 's devem satisfazer a certas propriedades também. O mais natural é que elas sejam *unitárias*, isto é

$$QQ^\dagger = Q^\dagger Q = \mathbf{1}. \quad (13.52)$$

Falei acima que o mais natural é que as matrizes Q 's sejam unitárias porque a condição de unitaridade reduz-se à de ortogonalidade no caso de as matrizes serem reais.

Usando explicitamente a forma da matriz Q , dada em (13.51), na relação (13.52), obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha\alpha^* + \beta\beta^* &= 1 \\ \Rightarrow \gamma\gamma^* + \delta\delta^* &= 1 \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* &= 0. \end{aligned} \quad (13.53)$$

As duas primeiras equações são reais e a última é complexa. Portanto, as Eqs. (13.53) fornecem quatro relações (as duas primeiras fornecem duas e a terceira mais duas) entre os oito parâmetros reais citados. Devido ainda à relação (13.52), temos, tomando o determinante de ambos os lados

$$(\det Q)(\det Q)^* = 1 \Rightarrow \det Q = e^{i\lambda}, \quad (13.54)$$

onde λ é um número real qualquer. Dentre todos os valores possíveis de Q (infinitos valores), escolhe-se

$$\det Q = 1. \quad (13.55)$$

As quatro condições dadas por (13.53) mais a condição dada por (13.55) fornecem-nos agora cinco relações entre os oito parâmetros contidos na matriz Q . Assim, temos três parâmetros independentes, que podemos escolher como sendo também os ângulos de Euler. Veremos também que as matrizes R 's podem ser escritas em termos dos dos parâmetros de Cayley-Klein.

Da mesma maneira em que tínhamos no espaço \mathbb{R}^3 os vetores V 's (matrizes coluna 3×1) sobre os quais atuavam as matrizes de transformação R 's, temos agora no espaço \mathbb{Z}^2 quantidades U 's (matrizes coluna 2×1) sobre os quais atuam as quantidades complexas Q 's. Isto é,

$$U' = QU, \quad (13.56)$$

ou, escrevendo explicitamente os elementos de matriz,

$$\begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (13.57)$$

temos

$$\begin{aligned} U'_1 &= \alpha U_1 + \beta U_2 \\ U'_2 &= \gamma U_1 + \delta U_2. \end{aligned} \quad (13.58)$$

As relações (13.56) - (13.58) representam uma rotação no espaço complexo considerado. Pode parecer à primeira vista que as quantidades U 's estejam diretamente relacionadas aos vetores V 's, mas não estão. As quantidades U 's são simplesmente a base de atuação das matrizes Q 's. Essas quantidades, que ocupam o lugar dos vetores no espaço complexo 2×2 , são chamadas de *spinors*. Uma melhor conceituação matemática dessas quantidades é vista em Teoria de Grupos, e aplicações em Mecânica Quântica, onde, por exemplo, os dois estados de *spin* do elétron podem ser expressos através de um *spinor*.

Neste ponto, é natural que surja a pergunta: onde aparecem as quantidades x , y e z neste espaço complexo 2×2 ? Essas quantidades aparecem em operadores hermitianos da forma

$$P = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad (13.59)$$

onde $P = P^\dagger$ (condição de hermiticidade). Convenientemente, o operador P possui traço nulo e determinante igual a $-(x^2 + y^2 + z^2)$. Mediante atuação das matrizes Q 's, esses operadores transformam-se por transformação de similaridade. Vejamos isto com detalhes. Seja W o resultado da atuação do operador P sobre o spinor U , isto é,

$$W = PU. \quad (13.60)$$

Aplicando o operador de transformação Q a ambos os lados desta expressão ou, em outras palavras, fazendo uma rotação no espaço complexo, temos

$$QW = QPU \Rightarrow W' = QPQ^\dagger QU = QPQ^\dagger U' = P'U', \quad (13.61)$$

que é a expressão (13.60) após a transformação Q . Na relação (13.61),

$$P' = QPQ^\dagger. \quad (13.62)$$

Já que o traço, o determinante e a propriedade de hermiticidade são invariantes numa transformação de similaridade, o operador P , após esta transformação, deve manter a mesma forma, isto é,

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}, \quad (13.63)$$

onde a invariância do determinante, aqui, corresponde à invariância do módulo do vetor

Vejamos, mais de perto, o que falamos sobre isomorfismo. Seja uma rotação no espaço \mathbb{R}^3 , realizada por uma matriz R_1 , sobre o vetor coordenada

$$X' = R_1 X. \quad (13.64)$$

A esta matriz R_1 está associada no espaço complexo \mathbb{Z}^2 uma matriz Q_1 onde temos, correspondentemente, uma transformação de similaridade do operador P ,

$$P' = Q_1 P Q_1^\dagger. \quad (13.65)$$

Seja uma outra rotação. Agora realizada por uma matriz de rotação R_2 , de tal maneira que

$$X'' = R_2 X' = R_2 R_1 X = R_3 X, \quad (13.66)$$

onde $R_3 = R_2 R_1$. No espaço complexo, temos

$$P'' = Q_2 P' Q_2^\dagger = Q_2 Q_1 P Q_1^\dagger Q_2^\dagger = Q_3 P' Q_3^\dagger, \quad (13.67)$$

onde $Q_3 = Q_2 Q_1$. Assim, vemos que à matriz $R_3 = R_2 R_1$ corresponde uma matriz $Q_3 = Q_2 Q_1$, confirmando aquilo que falamos sobre isomorfismo.

Vamos, agora, escrever as matrizes de rotação em termos dos parâmetros de Cayley-Klein e as matrizes Q 's em termos dos ângulos de Euler. Conhecemos com as matrizes R 's. Introduzamos, por questão de simplificação, as seguintes definições

$$\begin{aligned} x_+ &= x + iy, \\ x_- &= x - iy. \end{aligned} \quad (13.68)$$

Escrevendo explicitamente a relação (13.62), temos

$$\begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}. \quad (13.69)$$

Calculemos α^* , β^* , γ^* e δ^* em termos de α , β , γ e δ . Isto pode ser feito com a utilização das relações (13.53) e (13.55). O resultado é

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \delta, \\ \beta^* &= -\gamma, \\ \gamma^* &= -\beta, \\ \delta^* &= \alpha. \end{aligned} \quad (13.70)$$

Substituindo os valores acima em (13.69) e identificando os respectivos termos vem

$$\begin{aligned} x'_+ &= 2\gamma\delta z - \gamma^2 x_- + \delta^2 x_+, \\ x'_- &= -2\alpha\beta z - \beta^2 x_+ + \alpha^2 x_-, \\ z' &= (\alpha\delta + \gamma\beta) z + \beta\delta x_+ - \alpha\gamma x_- \end{aligned} \quad (13.71)$$

O que nos permite obter as expressões para x' , y' e z' e concluir que a matriz R em termos dos parâmetros de Cayley-Klein é dada por

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2) & \frac{i}{2}(-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & \gamma\delta - \alpha\beta \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) & -i(\gamma\delta + \alpha\beta) \\ \beta\delta - \alpha\gamma & i(\alpha\gamma + \beta\delta) & \alpha\delta + \gamma\beta \end{pmatrix}. \quad (13.72)$$

Passemos, agora, para a obtenção das matrizes Q 's em termos dos ângulos de Euler. Há uma maneira direta de se fazer isto que é comparar a relação (13.72) com (13.29) e obter um sistema super-resolvido envolvendo nove equações. Este processo é muito trabalhoso. Seguiremos um caminho mais simples e por onde obteremos informações complementares interessantes.

A matriz R , dada por (13.29), foi obtida através das matrizes A , B e C , dadas por (13.28). Como sabemos, a cada uma dessas matrizes corresponde uma matriz Q , no espaço complexo, que chamaremos respectivamente de Q_ϕ , Q_θ e Q_ψ . Em virtude do isomorfismo, temos que a matriz $R = CBA$ deve corresponder a matriz $Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi$. Assim, da primeira rotação, dada por ϕ , em torno do eixo z obtemos

$$\begin{aligned} x'_+ &= e^{-i\phi} x_+, \\ x'_- &= e^{i\phi} x_-, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (13.73)$$

Tendo em conta a relação (13.71), e comparando os termos de ambos os lados desta expressão, vem

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm e^{i\phi/2}, \\ \delta &= \pm e^{-i\phi/2}, \\ \alpha\delta &= +1, \\ \beta &= \gamma = 0 \end{aligned} \quad (13.74)$$

A relação $\alpha\delta = 1$ nos diz que podemos tomar α e δ ou ambos positivos ou ambos negativos. Esta arbitrariedade na fase vem da transformação de similaridade que admite tanto a matriz Q como $-Q$. Portanto, a cada matriz R do espaço \mathbb{R}^3 corresponde duas matrizes complexas Q e $-Q$ no espaço \mathbb{Z}^2 . Mesmo assim, podemos ainda continuar falando em isomorfismo da uma matriz R para um par de matrizes $(Q, -Q)$.

Escolhendo a fase positiva, temos

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (13.75)$$

Esta é a forma para as rotações onde z é constante. Seguindo procedimento semelhante, obtemos que

$$Q_\theta = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (13.76)$$

$$Q_\psi = \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (13.77)$$

A forma da matriz (13.76) corresponde a uma rotação para x constante. Finalmente, a matriz Q em \mathbb{Z}^2 relativa à \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 é diretamente obtida substituindo as relações (13.75)–(13.77) em $Q = Q_\psi Q_\theta Q_\phi$,

$$Q = \begin{pmatrix} e^{i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} & i e^{i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ i e^{-i(\psi-\phi)/2} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i(\psi+\phi)/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (13.78)$$

Antes de terminar esta seção, acho oportuno falar sobre mais alguns detalhes do que estamos vendo. Podemos escrever a matriz P , dada por (13.59), da seguinte maneira

$$P = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z, \quad (13.79)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.80)$$

são chamadas de *matrizes de spin de Pauli*. Elas, juntamente com a matriz identidade, formam um conjunto de quatro matrizes linearmente independentes. Assim, qualquer matriz 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear dessas matrizes.

No caso das matrizes Q_θ , Q_ϕ e Q_ψ , teríamos

$$\begin{aligned}
 Q_\phi &= 1 \cos \frac{\phi}{2} + i\sigma_z \sin \frac{\phi}{2} \\
 Q_\theta &= 1 \cos \frac{\theta}{2} + i\sigma_x \sin \frac{\theta}{2} \\
 Q_\psi &= 1 \cos \frac{\psi}{2} + i\sigma_y \sin \frac{\psi}{2}.
 \end{aligned} \tag{13.81}$$

Observamos claramente nas equações (13.81) a forma das matrizes para rotações em torno do eixo x (Q_θ) e em torno do eixo z (Q_ϕ e Q_ψ). Para rotações em torno do eixo y , usaríamos σ_y . Temos que σ_x , σ_y e σ_z são ditas geradores das rotações em torno dos eixos x , y e z respectivamente.

Notamos, ainda, que os ângulos ϕ , θ e ψ sempre aparecem divididos por dois. Esta é uma outra maneira de se entender porque a cada matriz no espaço \mathbb{R}^3 correspondem duas no espaço \mathbb{Z}^2 , pois uma rotação de 0 a 2π em \mathbb{R}^3 , volta-se à situação primitiva. Mas em \mathbb{Z}^2 não. Substituindo-se ϕ , θ e ψ por $\phi + 2\pi$, $\theta + 2\pi$ e $\psi + 2\pi$, respectivamente, em (13.81), obtém-se que

$$\begin{aligned}
 Q_\phi &\longrightarrow -Q_\phi, \\
 Q_\theta &\longrightarrow -Q_\theta, \\
 Q_\psi &\longrightarrow -Q_\psi.
 \end{aligned} \tag{13.82}$$

Então, como já tínhamos visto, a cada matriz R em \mathbb{R}^3 corresponde um par $(Q, -Q)$ em \mathbb{Z}^2 .

Maiores explicações sobre tudo que acabamos de ver serão obtidas quando do estudo de teoria de grupos e do estudo de mecânica quântica. Vamos voltar ao estudo do corpo rígido.

13.4 Teorema de Euler

No início do capítulo, tínhamos chegado à conclusão de que a localização de um corpo rígido no espaço é feita por seis coordenadas generalizadas independentes. Dessas seis coordenadas, escolhemos três espaciais para localização de um ponto do corpo rígido e mais três angulares para localização da orientação do corpo rígido em relação a este ponto. Nesta última parte, usamos os ângulos de Euler.

Há, entretanto, um detalhe importante que deve ser ressaltado. O fato de a localização do corpo rígido poder ser feita com três coordenadas espaciais e

três angulares não significa claramente que o movimento possa ser separado em uma translação de um ponto mais uma certa rotação em relação a este ponto. No caso de este ponto ser o centro de massa, tal separação é imediata. Lembremos das equações (10.20) e (10.26) para o caso geral de um sistema de partículas,

$$\bar{L} = \bar{R} \times (M\bar{V}^2) + \sum_a \bar{r}'_a \times \bar{p}'_a, \tag{13.83}$$

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a'^2. \tag{13.84}$$

onde o índice a está representando as partículas do corpo. Mais especificamente, o que estou querendo dizer é que se este ponto não for o centro-de-massa, tal separação não é óbvia (veja como as relações acima foram demonstradas).

Uma solução seria trabalhar apenas com o centro-de-massa, mas nem sempre isto é a melhor escolha. Vamos então demonstrar um teorema, devido a Euler, que estabelece o seguinte:

O deslocamento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação com respeito a um certo eixo.

Sejam novamente os sistemas de eixos x, y, z e x', y', z' como mostra a Figura 13.1 (onde o sistema x', y', z' está fixo ao corpo e se desloca com ele). O sistema x, y, z está imóvel.

Já vimos que as componentes de um certo vetor, em relação a dois sistemas de eixos, estão relacionadas por

$$V'_i = R_{ij} V_j, \tag{13.85}$$

ou, mais compactamente,

$$V' = R V, \tag{13.86}$$

na forma matricial, onde R é a chamada matriz de rotação e seus coeficientes podem ser escritos através dos ângulos de Euler [veja Eq. (13.29)].

Consideremos os dois sistemas inicialmente coincidentes ($t = 0$). O teorema estabelece que num instante posterior qualquer $t > 0$, o sistema de eixos preso ao corpo pode ser localizado por uma rotação simples em relação a um certo eixo.

A demonstração do teorema consistirá no seguinte. Sabemos que, na rotação, os pontos do eixo de rotação não são afetados pelo processo. Então, para um certo vetor \bar{Z} deste eixo, deveremos ter

$$Z' = RZ = Z, \quad (13.87)$$

onde Z' é uma matriz correspondente ao vetor no sistema (x', y', z') e Z , no sistema (x, y, z) . Assim, a demonstração do teorema consistirá em mostrar que existe um vetor \vec{Z} tal que a relação (13.87) seja satisfeita. Esta equação é um caso particular da equação de autovalores

$$RZ = \lambda Z, \quad (13.88)$$

onde λ e Z são o autovalor e o autovetor da matriz R , respectivamente. Como vemos, a Eq. (13.87) é um caso particular de (13.88) para $\lambda = 1$. Então, em outras palavras, o teorema de Euler estabelece o seguinte: **A matriz de rotação R possui sempre um autovalor +1.**

A Eq. (13.88) permite escrever

$$(R - \lambda I)Z = 0. \quad (13.89)$$

Considerando $\vec{Z} = (z_1, z_2, z_3)$, temos

$$\begin{aligned} (R_{11} - \lambda)z_1 + R_{12}z_2 + R_{13}z_3 &= 0, \\ R_{21}z_1 + (R_{22} - \lambda)z_2 + R_{23}z_3 &= 0, \\ R_{31}z_1 + R_{32}z_2 + (R_{33} - \lambda)z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (13.90)$$

Como já era de se esperar, o sistema de equações dado por (13.90) é indeterminado para z_1, z_2, z_3 . Isto pode ser observado em (13.88), pois se Z é um autovetor de R , temos que ele, multiplicado por uma constante, é ainda um autovetor. Para que o sistema de equações (13.90) apresente um solução diferente da solução $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, deveremos ter que o determinante dos coeficientes de (13.90) seja nulo,

$$\det \begin{pmatrix} R_{11} - \lambda & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} - \lambda & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (13.91)$$

A equação acima é chamada de *equação característica*. A solução desta equação dá-nos os autovalores para a Eq. (13.88).

Então, para demonstrar o teorema de Euler, temos de mostrar que pelo menos um dos autovalores é igual a +1, pois, só assim, (13.87) será verificada. Tudo que faremos a seguir consistirá em mostrar isto. Primeiramente,

observemos que, embora R seja uma matriz real (seus coeficientes são reais), a solução da equação de autovalores (13.88) pode possuir λ e Z complexos. É claro que essas quantidades não possuirão significado físico, mas fica claro que elas podem perfeitamente existir. Mesmo havendo a possibilidade de soluções complexas para λ na Eq. (13.91), fica claro que pelo menos um deles deve ser real, pois ela é uma equação cúbica em λ e as soluções complexas ocorrem aos pares.

Como segunda etapa, mostremos que λ , embora possa ser complexo, sempre possui módulo 1. Isto é visto considerando-se que o módulo do vetor é invariante nas rotações. No caso, temos de ter cuidado com a possibilidade de autovetores complexos. Assim, o módulo seria

$$|Z'|^2 = \vec{Z}^* \cdot \vec{Z}. \quad (13.92)$$

Estamos querendo que

$$\vec{Z}^* Z = \vec{Z}^* Z', \quad (13.93)$$

onde \vec{Z} é uma matriz linha. Substituindo Z' por λZ em (13.93), encontramos

$$\vec{R}^* R = \lambda^* \lambda \vec{R}^* R \Rightarrow \lambda^* \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\phi}. \quad (13.94)$$

As soluções reais são ± 1 .

Finalmente, vamos mostrar que não é possível, no caso de a transformação ortogonal ser uma rotação (poderia ser também uma inversão de eixos), deixar de haver o autovalor +1. Para isto, vamos aqui abrir um parêntese para discutir um importante ponto, que usaremos bastante mais tarde. Seja um certo operador matricial O . Consideremos que este operador atuando sobre um certo vetor \vec{U} dá-nos um outro vetor \vec{W} , isto é

$$W = O U. \quad (13.95)$$

Esta equação está definida para um certo sistema de eixos, por exemplo, x, y, z . Consideremos agora um outro sistema x', y', z' , obtido do primeiro através de uma transformação ortogonal R

$$(x, y, z) \xrightarrow{R} (x', y', z').$$

Vamos passar a Eq. (13.95) para o sistema (x', y', z') . Como U e W são vetores, temos

$$\begin{aligned}U' &= RU, \\W' &= RW.\end{aligned}\quad (13.96)$$

Utilizando (13.95), vem

$$W' = RW = ROU = RO\tilde{R}\tilde{R}U = RO\tilde{R}U' = O'U', \quad (13.97)$$

onde

$$O' = RO\tilde{R}, \quad (13.98)$$

sendo O' o operador O escrito no sistema de eixos com linha. Os vetores transformam-se como (13.96) e os operadores como (13.98) [Já tínhamos visto algo parecido na obtenção de (13.62)]. A transformação (13.98) é chamada *transformação de similaridade*. É às vezes importante ter O' num certo sistema para o qual ele é diagonal. Mostraremos a seguir que este problema está relacionado com o problema de autovalores e vice-versa. Seja O' na Eq. (13.98) diagonal

$$O' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (13.99)$$

Os elementos de matriz de O' podem genericamente ser escritos por

$$O'_{ij} = \lambda(i) \delta_{ij}. \quad (13.100)$$

Assim, considerando (13.98), temos

$$O'_{ij} = R_{ik} O_{kl} \tilde{R}_{lj}. \quad (13.101)$$

Então,

$$R_{ik} O_{kl} \tilde{R}_{lj} = \lambda(i) \delta_{ij}. \quad (13.102)$$

Multiplicando ambos os lados por \tilde{R}_{mi} , temos

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{mi} R_{ik} O_{kl} \tilde{R}_{lj} &= \lambda(i) \tilde{R}_{mi} \delta_{ij} \\ \Rightarrow \delta_{i,k} O_{kl} \tilde{R}_{lj} &= \lambda(j) \tilde{R}_{mj} \\ \Rightarrow O_{ml} \tilde{R}_{lj} &= \lambda(j) \tilde{R}_{mj}.\end{aligned}\quad (13.103)$$

A equação acima é uma equação de autovalores do tipo $OX = \lambda X$, onde os autovetores X são os vetores correspondentes a cada coluna da matriz \tilde{R} ou, o que é a mesma coisa, a cada linha da matriz R (matriz que produz a diagonalização). Os autovalores são os elementos diagonais da matriz diagonal O' . Portanto, vemos que o problema da diagonalização está relacionado com a solução de uma equação de autovalores.

Voltemos ao nosso problema inicial. Tínhamos concluído que $\lambda = e^{i\phi}$ [veja Eq. (13.94)] e que, conseqüentemente, os autovalores reais possíveis seriam ± 1 . Vamos mostrar que no caso das rotações não é possível deixar de haver o autovalor $+1$. Vamos mostrar isto agora. Primeiramente, sabemos que se λ é uma solução de (13.91), λ^* também o será. Em outras palavras, os autovalores complexos sempre ocorrem aos pares. Assim, os únicos conjuntos de solução onde não haveria o autovalor $+1$ seriam

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1, \lambda_2 = e^{i\phi} \text{ e } \lambda_3 = e^{-i\phi} \\ \text{e } \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = -1.\end{aligned}\quad (13.104)$$

Esses dois casos não correspondem a rotações. Isto se deve porque, sendo o determinante de uma matriz o produto de seus autovalores (lembrar de que o determinante de uma matriz não varia com uma transformação de similaridade), os dois conjuntos acima dão sempre determinante igual a -1 . Sabemos que este caso está relacionado a uma inversão de eixos e não a rotações. Assim, concluindo, sempre há o autovalor $+1$ nas rotações, o que prova o teorema de Euler.

Para finalizar esta seção, vamos mostrar que podemos escrever o ângulo de rotação, relativamente ao eixo acima considerado, através dos ângulos de Euler. Relembremos o que estamos fazendo. Tínhamos inicialmente dois sistemas de eixos x, y, z e x', y', z' que, num certo instante, estavam coincidentes. O sistema x', y', z' era considerado estar preso ao corpo e movia-se com ele. O sistema x, y, z era um sistema imóvel (veja a Figura 13.1). Num certo instante posterior t , a matriz que relaciona as componentes de um vetor em relação aos dois sistemas escritos em termos dos ângulos de Euler, é dado por (13.29).

Seja agora um outro sistema x'', y'', z'' tal que, por exemplo, o eixo z'' coincida com o eixo de rotação do corpo rígido. Este sistema de eixos, como x, y, z , também é imóvel. Então, no instante t , a matriz que relaciona as componentes do vetor nos sistemas x', y', z' e x'', y'', z'' é

$$R' = \begin{pmatrix} \cos \Phi & \text{sen } \Phi & 0 \\ -\text{sen } \Phi & \cos \Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.105)$$

As matrizes R e R' diferem por uma transformação de similaridade e como o traço é invariante nesta transformação, temos

$$\begin{aligned} 2 \cos \Phi + 1 &= \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi \text{sen } \psi \\ &\quad - \text{sen } \psi \text{sen } \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi + \cos \theta \\ &= \cos \psi \cos \phi (1 + \cos \theta) \\ &\quad - \text{sen } \psi \text{sen } \phi (1 + \cos \theta) + \cos \theta \\ &= (1 + \cos \theta) (\cos \psi \cos \phi - \text{sen } \psi \text{sen } \phi) + \cos \theta \\ &= (1 + \cos \theta) \cos(\psi + \phi) + \cos \theta. \end{aligned} \quad (13.106)$$

Os exemplos que vamos analisar de corpo rígido, quando o ponto considerado para origem do sistema de eixos preso ao corpo não coincide com o centro-de-massa, é com um ponto fixo (caso do movimento do pião). Não vamos considerar nenhum caso onde, além disto acontecer, tenhamos também uma translação. Mesmo aí o movimento geral do corpo rígido poderia ser separado numa rotação mais uma translação. Este é o chamado *teorema de Chasles*. não vamos demonstrar este teorema aqui.

13.5 Momento angular e energia cinética do corpo rígido

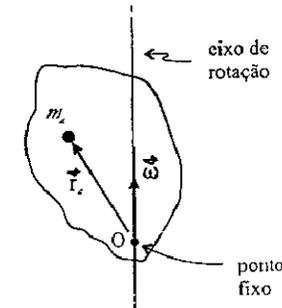
Esta parte já foi desenvolvida com detalhes no Capítulo 10. Vamos apenas revisar e enfatizar alguns pontos que serão úteis para o desenvolvimento que faremos aqui. Seja o movimento de um corpo rígido com um ponto fixo. Como vimos, este movimento pode sempre ser considerado como rotação no entorno de um certo eixo. Veja a Figura 13.9, onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotação do corpo rígido em relação ao eixo considerado.

O momento angular total de corpo rígido em relação ao ponto O será

$$\vec{L} = \sum_a m_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) = \sum_a m_a [\vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)] = \sum_a m_a [r_a^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_a \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_a]. \quad (13.107)$$

Podemos escrever esta expressão matricialmente como

Figura 13.9: Rotação de um corpo rígido com um ponto fixo.



$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad (13.108)$$

ou, simplesmente,

$$L = I \omega. \quad (13.109)$$

onde L , I e ω são as matrizes especificadas na relação (13.108). A matriz I é chamada de *matriz de inércia*. Os seus elementos

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_a m_a (r_a^2 - x_a^2), = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2) \\ I_{yy} &= \sum_a m_a (r_a^2 - y_a^2), = \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2) \\ I_{zz} &= \sum_a m_a (r_a^2 - z_a^2), = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) \end{aligned} \quad (13.110)$$

são os conhecidos *momentos de inércia* em relação aos eixos x , y e z , respectivamente. Os demais elementos

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \sum_a m_a \bar{x}_a \bar{y}_a, \\ I_{xz} &= I_{zx} = - \sum_a m_a \bar{x}_a \bar{z}_a, \\ I_{yz} &= I_{zy} = - \sum_a m_a \bar{y}_a \bar{z}_a, \end{aligned} \quad (13.111)$$

são chamados de *produtos de inércia*. De uma maneira geral, os nove elementos da matriz I, que podemos compactamente escrever

$$I_{ij} = \sum_a m_a [r_a^2 \delta_{ij} - x_i^a x_j^a] \quad (13.112)$$

(onde substituímos $x = x_1$, $y = x_2$ e $z = x_3$) constituem um tensor, o chamado *tensor de inércia*, conforme mostramos no Capítulo 10 (veja também Apêndice B).

Quanto à energia cinética do corpo rígido, consideremos novamente a Figura 13.9 e os mesmos argumentos vistos naquela oportunidade. Ela é dada por

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \sum_a \frac{1}{2} m_a (\bar{\omega} \times \bar{r}_a) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}_a). \quad (13.113)$$

Usando a conhecida identidade vetorial $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})(\bar{b} \cdot \bar{d}) - (\bar{a} \cdot \bar{d})(\bar{b} \cdot \bar{c})$, temos

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a [\omega^2 r_a^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_a)^2]. \quad (13.114)$$

Seja \hat{u} o unitário ao longo do eixo de rotação ($\bar{\omega} = \omega \hat{u}$). Assim,

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a [r_a^2 - (\hat{u} \cdot \bar{r}_a)^2] \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (13.115)$$

onde

$$I = \sum_a m_a [r_a^2 - (\hat{u} \cdot \bar{r}_a)^2] \quad (13.116)$$

é o momento de inércia em relação ao eixo de rotação. É importante atentar que a relação é válida para qualquer eixo e não apenas para os eixos principais.

Podemos escrever também T através do tensor de inércia.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [\omega^2 r_a^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_a)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [\omega_i \omega_j r_a^2 - \omega_i x_{ai} \omega_j x_{aj}] \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \omega_j \sum_a m_a [r_a^2 \delta_{ij} - x_{ai} x_{aj}] \\ &= \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \bar{\omega} I \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (13.117)$$

13.6 Movimento do pião

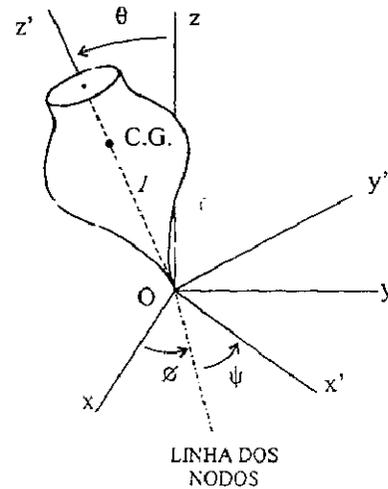
Para fins de comparação, acho oportuno relembrar os principais resultados deste problema, obtidos através do formalismo newtoniano (veja Capítulo 10). Naquela oportunidade, tínhamos optado em partir das constantes de movimento. Os dados relevantes encontram-se na Figura 13.10. Por questões técnicas, referimos o problema aos eixos x' , y' e z' que são eixos principais e onde os momentos de inércia não variam com o tempo. Assim, a energia total era dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \bar{\omega} I \bar{\omega} + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \bar{\omega}' I' \bar{\omega}' + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I'_1 (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \frac{1}{2} I'_3 \omega_{z'}^2 + Mgl \cos \theta, \end{aligned} \quad (13.118)$$

onde $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ são dados em termos dos ângulos de Euler por (veja Capítulo 10 para detalhes)

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{y'} &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{z'} &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (13.119)$$

Figura 13.10: Movimento do pião.



Acho oportuno lembrar o comentário que fizemos no Capítulo 10. No primeiro termo da expressão (13.118), $\frac{1}{2}\tilde{\omega}I\omega$, a matriz de inércia é variável. Por isso, passamos para $\frac{1}{2}\tilde{\omega}'I'\omega'$, onde a matriz de inércia é dada em termos de constantes. Entretanto, referir o problema a este sistema de eixos não significa que estamos trabalhando num referencial não inercial (se estivéssemos, o corpo rígido neste referencial estaria em repouso, $\tilde{\omega} = 0$). Estamos, simplesmente, tomando as componentes de $\tilde{\omega}$ em relação a este novo sistema de eixos (onde os unitários não são constantes). O torque externo é o mesmo ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ e $\vec{\tau}' = \vec{r}' \times \vec{F}'$, onde $\vec{r}' = \vec{r}$).

Substituindo (13.119) em (13.118), obteremos a expressão da energia total em termos dos ângulos de Euler

$$E = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3' (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta. \quad (13.120)$$

Para obter as outras constantes do movimento, notamos que o torque é sempre perpendicular aos eixos z e z' . Logo, as componentes do momento angular ao longo destes eixos são constantes (veja Capítulo 10 para detalhes),

$$L_{z'} = I_3' (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (13.121)$$

$$L_z = (I_1' \sin^2 \theta + I_3' \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3' \cos \theta \dot{\psi}. \quad (13.122)$$

As constantes do movimento são dadas, portanto, pelas relações (13.120)-(13.122). É fácil ver que a solução do problema fica a menos do cálculo de três integrais, como estudamos no Capítulo 10.

Passemos agora a ver como se chega a este mesmo ponto através do formalismo lagrangiano. Seja o mesmo pião da Figura 13.10, só que raciocinaremos sem forças e torques. A obtenção da energia cinética, em nada difere do que foi feito acima. Como a energia potencial V é igual a $Mgl \cos \theta$, temos que a lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2} I_1' (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3' (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta. \quad (13.123)$$

Observe que as coordenadas ϕ e ψ são cíclicas, portanto, p_ϕ e p_ψ são constantes.

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1' \sin^2 \theta + I_3' \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3' \dot{\psi} \cos \theta \quad (13.124)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3' (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3' \omega_{z'}, \quad (13.125)$$

onde $\omega_{z'}$ é constante. Como a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, uma outra constante do movimento é a energia total, dada por (13.120). Estas são, portanto, as mesmas constantes encontradas através do formalismo newtoniano, onde $p_\phi = L_z$ e $p_\psi = L_{z'}$.

Daqui para a frente, o procedimento é o mesmo para os dois formalismos e os resultados são os mesmos encontrados no Capítulo 10. Vamos apenas complementar um pouco aquele estudo fazendo algumas previsões quantitativas quando inicialmente temos $\theta = 0$, $\dot{\phi} = 0$ e a energia cinética inicial sendo muito maior que a máxima variação da energia potencial, isto é,

$$\frac{1}{2} I_3' \omega_{z'}^2 \gg 2Mgl. \quad (13.126)$$

Extensão da nutação:

Como já falamos, está claro que o único movimento possível após o instante inicial ($t = 0$), será a queda do corpo, isto é, o aumento do ângulo θ . Chame-mos θ_0 o ângulo θ para $t = 0$. Este ângulo corresponde ao ângulo limite θ_2 das Figs. X.31-33. Tendo em conta que em $t = 0$, $\dot{\phi} = 0$, temos, pela Eq. (10.91),

$$\begin{aligned} b - a \cos \theta_0 &= 0, \\ b &= a u_0, \end{aligned} \quad (13.127)$$

para $\theta_0 \neq 0$ [veja o denominador de (10.91)]. Também temos, usando a relação (10.93) que (observando que em $t = 0$, $\theta = 0$)

$$\alpha = \beta u_0. \quad (13.128)$$

Com essas duas relações, podemos escrever $f(u)$ da seguinte maneira

$$f(u) = (u_0 - u) [\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)]. \quad (13.129)$$

Como não podia deixar de ser, uma das raízes de $f(u)$ é $u = u_0$. Calculemos a outra raiz e, assim, teremos uma medida quantitativa da extensão da nutação.

$$\begin{aligned} \beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u) &= 0 \\ \Rightarrow u^2 - \frac{a^2}{\beta}u + \frac{a^2}{\beta}u_0 - 1 &= 0 \\ \Rightarrow u &= \frac{a^2}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4\beta^2} - \frac{a^2u_0}{\beta} + 1}. \end{aligned} \quad (13.130)$$

A solução com + é sempre > 1 . Portanto, não serve. A solução que procuramos é

$$u_1 = \frac{a^2}{2\beta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\beta}{a^2}u_0 + \frac{4\beta^2}{a^4}} \right). \quad (13.131)$$

O termo $4\beta/a^2$ é muito menor do que 1, conforme podemos diretamente comprovar. Considerando os valores de β e a dados em (10.90) e tendo em conta (13.125), vem

$$\frac{4\beta}{a^2} = \frac{8Mgl}{I_1} \cdot \frac{I_1^2}{I_2^2 - I_3^2} = 8 \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{Mgl}{I_2\omega_z^2}. \quad (13.132)$$

Pela condição (13.126), este termo é muito menor do que 1, a não ser que $I_1 \gg I_3$. Entretanto, esta última condição corresponde a um corpo com a forma de um charuto. Não estamos considerando tais corpos. Portanto, $4\beta/a^2$ é realmente muito menor do que 1. Assim, usando a expansão binomial, temos, desprezando termos infinitesimais de ordem igual ou superior a $(\beta/a^2)^2$

$$u_1 = u_0 - \frac{\beta}{a^2} \text{sen}^2 \theta_0. \quad (13.133)$$

Como estamos interessados na extensão da nutação, fazemos

$$x_1 = u_0 - u_1 = \frac{\beta \text{sen}^2 \theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{2Mgl}{I_3\omega_z^2} \text{sen}^2 \theta_0. \quad (13.134)$$

Considerando o que foi dito quanto a I_1 e I_3 , vemos que quanto maior ω_z , menor será a extensão da nutação.

Frequência da nutação:

Para as condições acima mencionadas, podemos obter a frequência de nutação. Como já foi dito, a extensão de nutação é muito pequena. Assim, podemos escrever

$$1 - u^2 \simeq \text{sen}^2 \theta_0. \quad (13.135)$$

Substituindo este resultado em (13.129) e tendo em conta que $f(u) = \dot{u}^2 = \dot{x}^2$ (pois $x = u_0 - u$), temos

$$\dot{x}^2 = x (\beta \text{sen}^2 \theta_0 - a^2 x) \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x_1 x - x^2}} = a dt, \quad (13.136)$$

onde $x_1 = \beta \text{sen}^2 \theta_0 / a^2$ [veja Eqs. (13.133) e (13.134)]. Considerando que $x = 0$ para $t = 0$, temos que a solução da integral (13.136) fornece

$$x = \frac{x_1}{2} (1 - \cos at). \quad (13.137)$$

Então, a é a frequência angular de nutação do eixo do corpo entre θ_0 e θ_1 , que é tanto maior quanto maior for ω_z ($a = I_3\omega_z/I_1$).

Velocidade de precessão:

Combinando (10.91), (13.127) e (13.137), encontramos

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a} (1 - \cos at). \quad (13.138)$$

A velocidade angular de precessão varia harmonicamente com o tempo, com a mesma frequência de nutação. A velocidade média de precessão é diretamente dada por

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3 \omega_z'} \quad (13.139)$$

que é tanto menor quanto maior for ω_z' .

Podemos nos aprofundar mais neste tipo de problema determinando para que condições iniciais teremos uma precessão completamente sem nutação, isto é, o ângulo θ deve permanecer constante todo o tempo, igual ao seu valor inicial θ_0 . Em outras palavras, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. Este é o caso da Figura 10.28, onde $f(u)$ deve possuir uma raiz dupla no ponto $u = u_0$. Tendo em conta as relações (10.93), (10.95) e (10.96), para que $f(u) = 0$ em $\theta = \theta_0$ deveremos ter $\dot{\theta}^2 = 0$ em $\theta = \theta_0$. Mas para que $f(u)$ tenha raiz dupla em $\theta = \theta_0$, deveremos ter, também, $\ddot{\theta} = 0$ para $\theta = \theta_0$. Vejamos isto. Já que $\dot{\theta}^2$ é uma função de θ , temos

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = 0, \quad (13.140)$$

para $\theta = \theta_0$, que é a condição para θ_0 ser raiz dupla¹.

Por outro lado,

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = 2\dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = 2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} \frac{d\theta}{d\theta} = 2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 2\ddot{\theta}. \quad (13.141)$$

Então, $d\dot{\theta}^2/d\theta = 0$ para $\theta = \theta_0$ corresponde a $\ddot{\theta} = 0$ para $\theta = \theta_0$.

Vamos, então, extrair a condição de raiz dupla a partir de (10.93). Derivando esta relação com respeito ao tempo, vem

$$\ddot{\theta} = \frac{\beta \sin \theta}{2} - \frac{a(b - a \cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta (b - a \cos \theta)^2}{\sin^3 \theta}. \quad (13.142)$$

Pela condição de raiz dupla em $\theta = \theta_0$, temos

¹Uma função quando possui raiz dupla, sua derivada em relação à variável também se anula.

$$\frac{\beta}{2} = \frac{a(b - a \cos \theta_0)}{\sin^2 \theta_0} - \frac{\cos \theta_0 (b - a \cos \theta_0)^2}{\sin^4 \theta_0}. \quad (13.143)$$

Usando a relação (10.91), vem

$$\frac{\beta}{2} = a \dot{\phi} - \cos \theta_0 \dot{\phi}^2, \quad (13.144)$$

onde $\dot{\phi}$ é tomado em $\theta = \theta_0$. Substituindo os valores de β e a , obtidas em (10.90) - (10.92), vem

$$\begin{aligned} \frac{Mgl}{I_1} &= \frac{I_3}{I_1} \dot{\phi} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta_0) - \cos \theta_0 \dot{\phi}^2 \\ \Rightarrow Mgl &= \dot{\phi} [I_3 \dot{\psi} - (I_1 - I_3) \dot{\phi} \cos \theta_0]. \end{aligned} \quad (13.145)$$

Então, para que haja apenas precessão (sem nutação), deveremos ter para $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ e $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ satisfazendo a relação (13.145). Como vemos, um deles ($\dot{\phi}$ ou $\dot{\psi}$) pode ser escolhido (não tão arbitrariamente) e o outro deve ser determinado pela Eq. (13.145).

Quando disse acima que a escolha não é tão arbitrária é porque (13.145) é quadrática em $\dot{\phi}$ e o discriminante deve ser maior ou igual a zero a fim de que $\dot{\phi}$ seja real, isto é,

$$I_3 \dot{\psi} - 4Mgl (I_1 - I_3) \cos \theta_0 \geq 0. \quad (13.146)$$

Esta equação limita os valores possíveis de $\dot{\psi}$ e θ_0 . A Eq. (13.145) dá-nos duas soluções para $\dot{\phi}$. Essas soluções são conhecidas como precessões *rápida* e *lenta*. Podemos notar também que $\dot{\phi} = 0$ nunca pode ocorrer para $\dot{\psi}$ finito.

Como última análise, vamos considerar o caso em que, inicialmente, $\theta_0 = 0$. Isto é, para $t = 0$ o eixo de simetria do corpo coincide com o eixo vertical. Isto implica que p_ϕ e p_ψ são coincidentes [veja (13.124) e (13.125)]. Assim, de (10.90), temos

$$a = b. \quad (13.147)$$

Temos também que,

$$\vec{E} = Mgl, \quad (13.148)$$

pois $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = 0$. Lembrar que $\vec{E} = E - \frac{1}{2} I_3 \omega_z'^2$. Considerando as definições de α e β [veja (10.90)], temos, em virtude de (13.148),

$$\alpha = \beta. \quad (13.149)$$

Usando as expressões (13.147) e (13.149), temos que a relação (13.129) passa a ser

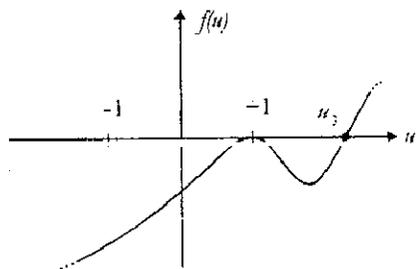
$$f(u) = (1-u)^2[\alpha(1+u) - a^2]. \quad (13.150)$$

Como vemos, $u = 1$ é uma raiz dupla. A terceira raiz é dada por

$$\alpha(1+u_3) - a^2 = 0 \Rightarrow u_3 = \frac{a^2}{\alpha} - 1. \quad (13.151)$$

No caso de $u_3 > 1$ (não existe fisicamente), o movimento do corpo será sempre girando no eixo vertical. Não haverá nutação. O gráfico $f(u)$ versus u seria dado pela Figura 13.11. Só haverá nutação se $u_3 < 1$ (e maior que -1 naturalmente), que é o caso da Figura 13.12.

Figura 13.11: Caso de movimento girando sempre no eixo vertical.



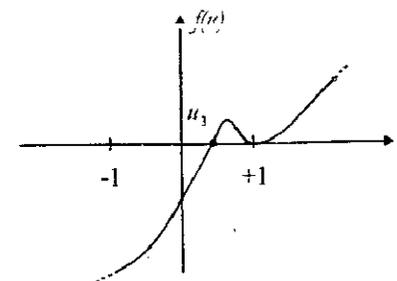
O limite de nutação será $\cos \theta_3 = u_3$. O caso limite corresponderá a $u_3 = 1$. Assim,

$$u_3 = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{I_3^2 \omega'^2}{2I_1 M g l} = 2 \Rightarrow \omega'^2 = \frac{4M g l \alpha I_1}{I_3^2}. \quad (13.152)$$

Se $\omega_z > \omega'$, o movimento não terá força de nutação. Só haverá nutação se $\omega_z < \omega'$

O que acontece na prática é o seguinte. Consideremos que o pião começa girando com o eixo de simetria na posição vertical e com $\omega_z > \omega'$. Devido ao

Figura 13.12: Caso em que haverá nutação.



atrito com o ar, ω_z vai diminuindo. Após atingir o valor limite, começa a ter nutação.

► Exercícios

13.1*: Com o uso da definição de determinante, relação (13.46), mostre que $\det(AB) = \det A \det B$.

13.2. Como vimos no texto, nem tudo que tem índices é vetor ou tensor. Verifique se δ_{ij} e ϵ_{ijk} são tensores.

13.3. Mostre que $\vec{J} \times \vec{J} = \vec{J}$, tendo em conta que as componentes de J são operadores satisfazendo as seguintes relações

$$J_1 J_2 - J_2 J_1 = J_3,$$

$$J_2 J_3 - J_3 J_2 = J_1,$$

$$J_3 J_1 - J_1 J_3 = J_2.$$

ou, compactamente,

$$J_i J_j - J_j J_i = \epsilon_{ijk} J_k.$$

13.4*. Mostre que as matrizes de spin de Pauli, dadas por (13.80), satisfazem à relação

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2 . Considerando $\vec{\sigma} = \hat{i}\sigma_1 + \hat{j}\sigma_2 + \hat{k}\sigma_3$, mostre que

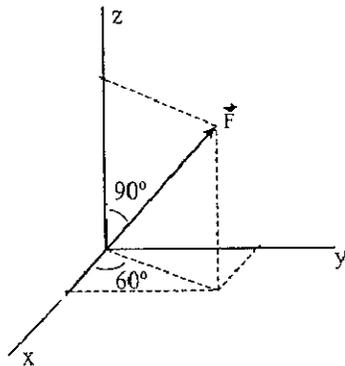
$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \mathbf{1} \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{\sigma},$$

onde \vec{a} e \vec{b} são vetores comuns.

13.5. Ache a transformação ortogonal que leva o sistema de eixos (x, y, z) , mostrado na Figura 13.13, para um novo sistema (x', y', z') , tal que neste novo sistema o vetor \vec{F}' só possua componente em y' .

Figura 13.13: Exercício 5.



13.6. Obtenha as relações (13.70).

13.7. Obtenha a matriz de rotação R em termos dos parâmetros de Cayley-Klein, dada por (13.72).

13.8. Obtenha (13.73).

13.9. Idem para (13.74).

13.10. Idem para (13.76) e (13.77).

13.11. Obtenha as matrizes de spin de Pauli dadas por (13.80).

13.12. Obtenha as relações (13.81).

13.13. Mostre que todo eixo que passa pelo centro de um cubo é principal.

13.14. Idem para (13.133).

13.15. Idem para (13.136).

13.16. Idem para (13.137).

13.17. Idem para (13.138).

13.18. Mostre ou explique que uma função quando possui raiz dupla, sua derivada em relação à variável também se anula.

CAPÍTULO 14

Formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica

O que vamos ver neste Capítulo é, em princípio, uma forma alternativa de se descrever a Mecânica Clássica que é apoiado na função hamiltoniana, em lugar da lagrangiana. O ponto de partida continua sendo o princípio de Hamilton. A evolução temporal do sistema físico será dado pelas equações de Hamilton em lugar da de Lagrange. Elas são equações diferenciais de primeira ordem no tempo que, quando combinadas, levam às mesmas equações diferenciais obtidas pelo formalismo lagrangiano que, por sua vez, eram as mesmas obtidas pela segunda lei de Newton. Assim como o uso do formalismo lagrangiano não era operacionalmente vantajoso (nem desvantajoso) em relação ao newtoniano quando usado no campo de atuação da mecânica, o mesmo acontece com o formalismo hamiltoniano. A vantagem está na parte formal da teoria, principalmente no que se refere à passagem para a mecânica quântica.

14.1 Equações de Hamilton

Começemos relembando a função hamiltoniana, introduzida no Capítulo 12 [veja relação (12.41)]

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (14.1)$$

Na formulação lagrangiana, considerávamos que as variáveis independentes eram (q, \dot{q}, t) . No caso da formulação hamiltoniana o conjunto de variáveis independentes é dado por (q, p, t) . De fato, é fácil verificar que é este o conjunto de variáveis independentes para a função hamiltoniana. Considerando que $L = L(q, \dot{q}, t)$, temos

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (14.2)$$

onde na segunda passagem foi usada a definição de momento canônico. Tendo em conta que podemos escrever $p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$, temos, combinando este resultado com a relação (14.2),

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (14.3)$$

De acordo com (14.1), vem

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (14.4)$$

O que mostra nitidamente que $H = H(q, p, t)$. Observe que para se chegar a esta conclusão, não foi necessário usar a equação de Euler-Lagrange, apenas usamos a definição de momento canônico. Isto significa que $H = H(q, p, t)$ independentemente do princípio de Hamilton, ou seja, mesmo fora da trajetória clássica.

Se reescrevermos a relação acima na trajetória clássica, o que pode ser feito diretamente com o uso da equação de Euler-Lagrange, isto é, pela substituição de $\partial L/\partial q_i$ por \dot{p}_i , temos,

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (14.5)$$

Por outro lado, como $H = H(q, p, t)$, podemos escrever

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (14.6)$$

Comparando com a relação anterior (que foi escrita sobre a trajetória clássica), temos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (14.7)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (14.8)$$

Estas são as chamadas *Equações de Hamilton*¹. Não foi escrita a relação $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ por ser uma mera identidade [veja expressão (14.1)].

Para obter as relações (14.7) e (14.8), fizemos uso da equação de Euler-Lagrange. Isto garantiu a evolução correta do sistema. Poderíamos, alternativamente, em lugar de usar a equação de Euler-Lagrange ter partido do princípio de Hamilton, isto é,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (14.9)$$

e substituindo L pela expressão obtida de (14.1), isto é,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0. \quad (14.10)$$

Desenvolvendo a relação acima, vem

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0. \quad (14.11)$$

Como nos extremos t_1 e t_2 , $\delta q_i = 0$, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt. \quad (14.12)$$

Substituindo este resultado na expressão anterior e arrumando convenientemente os termos, vem

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0. \quad (14.13)$$

É preciso ter um pouco de cuidado antes de se concluir alguma coisa desta equação. Embora as variáveis q_i e p_i sejam independentes, não podemos dizer

¹Observe que a Eq. (14.7) foi obtida sem a necessidade de se considerar a trajetória clássica. Ela está relacionada com a expressão do momento. Adiante, falaremos mais sobre isto.

que os coeficientes de δq_i e δp_i sejam nulos na relação (14.13). Para nos convenceremos disto, voltemos ao Capítulo 12 e relembremos da obtenção da Equação de Euler-Lagrange. Naquele oportunidade, tínhamos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0. \quad (14.14)$$

Ora, apesar de q_i e \dot{q}_i serem independentes, não concluímos que os coeficientes de δq_i e $\delta \dot{q}_i$ fossem nulos. O mesmo acontece agora². Seja, então, a relação (14.1) e tomemos a derivada em relação ao momento de ambos os lados

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k. \quad (14.15)$$

que é uma das equações de Hamilton [veja (14.7)]. É interessante observar que esta relação foi obtida diretamente das definições da Hamiltoniana e do momento canônico (veja nota ¹). Não foi preciso usar as equações de movimento. Ela vale mesmo fora da trajetória clássica! Assim, esta expressão não está propriamente relacionada à evolução temporal do sistema. Ela é apenas uma consistência em relação à definição de momento.

Levando o resultado dado por (14.15) em (14.13), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt = 0. \quad (14.16)$$

Agora, sim, podemos sem dúvida concluir que $p_i = -\partial H / \partial q_i$, que é a outra das equações de Hamilton.

Acho oportuno, neste momento, fazer uma análise comparativa entre os formalismos lagrangiano e hamiltoniano. Um ponto importante a destacar é que ambos se fundamentam no princípio de Hamilton.

(i) No formalismo lagrangiano temos N equações diferenciais de segunda ordem, desenvolvidas num espaço com N coordenadas generalizadas, chamado *espaço das configurações*. No hamiltoniano, são $2N$ equações de primeira ordem e o espaço possui $2N$ coordenadas (N coordenadas generalizadas e N momentos), chamado *espaço das fases*. Diga-se de passagem que ambos os casos fornecem as mesmas equações diferenciais (como não podia deixar de ser). Neste caso, como já dissemos, não há vantagens em usar um ou outro formalismo, como você poderá comprovar nos exemplos.

²Este ponto embora seja desconsiderado por muitos autores não o é, por exemplo, no A. Sommerfeld, *Mechanics*, página 219.

(ii) No formalismo hamiltoniano, os momentos e coordenadas (quantidades independentes) ocupam uma posição quase que simétrica nas equações de Hamilton. O mesmo não ocorre na equação de Lagrange em relação às coordenadas e velocidades generalizadas.

(iii) Quando uma coordenada é cíclica na lagrangiana ela o é também na hamiltoniana. Idem para a dependência temporal explícita. Então, as leis de conservação para o momento conjugado e hamiltoniana são também diretamente obtidas no formalismo hamiltoniano.

14.2 Aplicações das equações de Hamilton

14.2.1 Máquina de Atwood

Vamos, mais uma vez, fazer este sistema como exemplo. A finalidade é que se possa fazer uma comparação ampla sobre a utilização dos formalismos apresentados. Pelos dados da Figura 14.1, temos

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2,$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g (l - x)$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x, \quad (14.17)$$

onde, na expressão da lagrangiana acima, desprezamos um termo constante. A expressão da hamiltoniana é dada por

$$H = p\dot{x} - L = p\dot{x} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_2 - m_1) g x. \quad (14.18)$$

Costuma ser de praxe escrever a expressão da hamiltoniana apenas em termos de coordenadas e momentos, eliminando as velocidades. Isto é diretamente feito com o uso da expressão do momento canônico, que no caso é

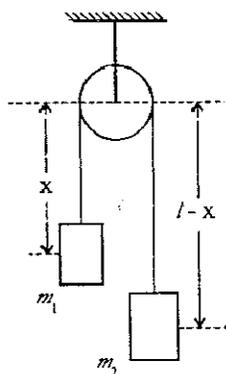
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x}. \quad (14.19)$$

Combinando então (14.18) e (14.19), obtemos

$$H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} + (m_2 - m_1) g x. \quad (14.20)$$

Calculemos, agora, as equações de Hamilton. Usando (14.7), temos

Figura 14.1: Máquina de Atwood.



$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2}. \quad (14.21)$$

Como vemos, esta expressão nada mais é do que uma relação de consistência com a expressão do momento conjugado à coordenada x [veja (14.19)]. Por este motivo, é que sua obtenção não depende da trajetória clássica, como vimos na Seção 1. A dinâmica propriamente dita é dada pela segunda equação de Hamilton. Usando (14.8), encontramos

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)g. \quad (14.22)$$

Combinando com a expressão anterior, que é, como vimos, a expressão do momento canônico, obtemos a conhecida aceleração com que as massas se deslocam

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (14.23)$$

Vamos concluir este exemplo fazendo duas observações que julgo da maior importância. Gostaria que vocês prestassem especial atenção a elas.

(i) Quando discutimos este exemplo no Capítulo 12, usando o formalismo lagrangiano, vimos como tratá-lo através de vínculos, isto é, começávamos considerando que o comprimento do fio não era constante e introduzíamos esta condição posteriormente como um vínculo. O tratamento de vínculos no

formalismo hamiltoniano é algo muito mais envolvente (não estou me restringindo ao caso das equações de movimento apenas). Adiantemos apenas que ele foi desenvolvido por Dirac, na década de cinquenta, com o intuito de quantizar a gravitação. Embora o problema da quantização da gravitação permaneça em aberto até hoje, o método desenvolvido por Dirac é algo da maior importância no estudo de teoria de campos.

(ii) Disse acima, antes da obtenção de (14.20), que era de praxe escrever a expressão da hamiltoniana apenas em termos de coordenadas e momentos, eliminando as velocidades. Isto não é necessário. Acontece que nos exemplos a que estamos acostumados a lidar, onde a lagrangiana é quadrática nas velocidades e, conseqüentemente, os momentos são lineares nas velocidades, tal substituição é algo tão simples que não há por que não fazê-lo. Adianto que há atualmente sistemas na Física onde as lagrangianas podem ser mais do que quadráticas nas velocidades e tal substituição pode ser bem complicada. A fim de nos convenceremos (pelo menos um pouco) que tal substituição não é necessária, consideremos o mesmo exemplo da hamiltoniana dada por (14.18). Primeiramente, lembremos que a expressão de definição da hamiltoniana já assume, implicitamente, que ela não depende da velocidade. De fato,

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - L \right) = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (14.24)$$

A última passagem é em virtude da definição de momento. Assim, é claro que a hamiltoniana não depende das velocidades (como já sabíamos), não sendo portanto, necessário que elas sejam eliminadas.

Voltemos ao exemplo. Calculemos então as equações de Hamilton a partir de (14.18). Tínhamos visto que o uso da primeira equação usando a hamiltoniana (14.20) levava a uma expressão que nada mais era do que uma consistência com a expressão de definição do momento. Agora, temos,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x},$$

que nada mais é do que uma identidade. Resultado este que guarda uma certa consistência com o anterior, isto é, de que a dinâmica do sistema é dada pela segunda das equações de Hamilton. Assim,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (m_1 - m_2)g, \quad (14.25)$$

onde, usando a expressão do momento, somos levados à mesma equação obtida para a aceleração das massas m_1 e m_2 .

14.2.2 Partícula carregada movendo-se num campo eletromagnético

Este é um exemplo que nos levará também a conclusões interessantes. Primeiramente, para escrever a lagrangiana (e, depois, a hamiltoniana), temos de saber qual é a energia potencial da partícula, isto, é, qual é a energia potencial que fornece a força de Lorentz. Acredito que esta questão ainda não tenha passado pela mente de vocês. Como é que pode haver uma energia potencial que leve a uma força dependente da velocidade? No formalismo lagrangiano (e conseqüentemente no hamiltoniano), tal potencial pode ser obtido de forma bem natural. Para vermos isto, escrevamos a equação de Euler-Lagrange convenientemente como, separando L em $T - V$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (14.26)$$

No caso em que q_i são coordenadas com dimensão de comprimento, temos que $-\partial V/\partial q_i$ dá a força usual que conhecemos da Mecânica Newtoniana. No caso em que q_i não tem necessariamente a dimensão de comprimento, poderíamos, então, pensar em $-\partial V/\partial q_i$ como a *força generalizada*. Entretanto, pela expressão (14.26), notamos que este conceito pode ser ainda mais amplo. Podemos chamar de *força generalizada* a quantidade

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (14.27)$$

e é com esta relação que obteremos a força de Lorentz.

Seja a expressão da força de Lorentz no sistema gaussiano de unidades (que é o sistema comumente usando nos textos científicos)

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}. \quad (14.28)$$

A diferença está no fator c . Sejam as seguintes equações de Maxwell (também em unidades gaussianas)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (14.29)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (14.30)$$

As outras duas equações de Maxwell não serão usadas. O fato de o campo magnético ter divergência nula, implica que ele é um campo rotacional, isto é,

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (14.31)$$

onde \vec{A} é o chamado *potencial vetor*, que é definido, como podemos ver, a menos do gradiente de uma função escalar qualquer. Combinando (14.29) e (14.31) temos

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (14.32)$$

o que mostra ser o campo vetorial $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ um campo gradiente. Escrevamos, então, convenientemente

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi. \quad (14.33)$$

Notamos que, no caso estático, temos a relação bem conhecida $\vec{E} = -\text{grad } \phi$.

Substituindo (14.31) e (14.33) em (14.28), encontramos

$$\frac{\vec{F}}{q} = -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \text{rot } \vec{A}. \quad (14.34)$$

Vamos trabalhar o termo $\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}$ usando a conhecida identidade vetorial $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a}$. Diretamente, podemos obter que

$$\vec{v} \times \text{rot } \vec{A} = \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A}. \quad (14.35)$$

Substituindo (14.35) em (14.34), vem

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}}{q} &= -\text{grad} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right) - \frac{1}{c} \left[(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \\ &= -\text{grad} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right) \\ &\quad - \frac{1}{c} \left[\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \\ &= -\text{grad} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right) - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}. \end{aligned} \quad (14.36)$$

Por outro lado, podemos dizer que

$$\vec{A} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{v} \cdot \vec{A}) = \nabla_v (\vec{v} \cdot \vec{A}). \quad (14.37)$$

Substituindo (14.37) em (14.36), temos

$$\frac{\vec{F}}{q} = -\text{grad} \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right) + \frac{d}{dt} \text{grad}_v \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \right), \quad (14.38)$$

onde foi usado que $\text{grad}_v \phi = 0$.

Esta é a equação que pretendíamos mostrar. Comparando com (14.27), temos que o potencial generalizado que origina a força de Lorentz é dado por

$$V(\vec{r}, \vec{v}) = q\phi - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (14.39)$$

Então, a lagrangiana para uma partícula de massa m e carga q movendo-se num campo eletromagnético, é

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (14.40)$$

O momento conjugado é obtido diretamente

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{q}{c} A_y \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{q}{c} A_z \\ \Rightarrow \vec{p} &= m\vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Observar que o momento canônico da partícula não é $m\vec{v}$. Há o termo $q\vec{A}/c$, ou seja, parte do momento fica no potencial magnético.

A hamiltoniana para a mesma partícula é também facilmente calculada

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi. \quad (14.42)$$

É importante destacar que quando se estuda um sistema quântico e se faz a passagem da função hamiltoniana clássica para o operador hamiltoniano, é o momento canônico que se substitui por $\frac{i}{\hbar} \nabla$ e não apenas $m\vec{v}$.

14.3 Mais uma ponte para a Mecânica Quântica

Vimos na Seção 12.4 uma maneira de visualizar da Mecânica Clássica um caminho para a Mecânica Quântica, onde o princípio da mínima ação correspondia

à física clássica e, no caso do mundo quântico, todas as “trajetórias” poderiam contribuir para o cálculo do propagador. Tal método, não muito difundido nos cursos de graduação, é conhecido como *integrals de caminho ou integrais de trajetória de Feynman*. Vamos, nesta seção, ver uma outra maneira de passar do mundo clássico para o quântico, num processo conhecido como *quantização canônica*.

Comecemos considerando uma quantidade genérica, definida no espaço das fases, que chamaremos de $A(q, p, t)$. A evolução temporal desta quantidade é dada por

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (14.43)$$

Se estamos querendo que esta expressão represente uma evolução temporal consistente com o mundo clássico, devemos usar as equações de Hamilton. Assim, substituindo em (14.43) \dot{q}_i e \dot{p}_i dados pelas equações de Hamilton, encontramos

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (14.44)$$

onde $\{A, H\}$ é, por definição,

$$\{A, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right), \quad (14.45)$$

que é chamado de *parêntese de Poisson* entre A e H . De uma maneira geral, o parêntese de Poisson entre duas quantidades quaisquer A e B é dado por

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (14.46)$$

Os parênteses de Poisson satisfazem às seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -\{B, A\}, \\ \{A + B, C\} &= \{A, C\} + \{B, C\}, \\ \{AB, C\} &= \{A, C\}B + A\{B, C\}, \\ \{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} &= 0. \end{aligned} \quad (14.47)$$

A última relação acima é chamada de *identidade de Jacobi*. Para o caso particular de q_i e p_j , temos

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \\ \{q_i, q_j\} &= 0 = \{p_i, p_j\}, \end{aligned} \quad (14.48)$$

que são chamados de *parênteses fundamentais de Poisson*.

Vejam, agora, o que acontece no mundo quântico. Aqui, as grandezas observáveis são obtidas mediante atuação de operadores hermitianos sobre funções de estado³. Seja, então, a seguinte equação de autovalores

$$A\psi = a\psi, \quad (14.49)$$

onde A é um operador hermitiano $A^\dagger = A$ e a é o correspondente autovalor. A necessidade de o operador A ser hermitiano é porque o autovalor a tem necessariamente de ser real.

Tanto ψ , A e a podem, num caso geral, depender do tempo. A evolução temporal de ψ é dada pela equação de Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (14.50)$$

onde H é o operador hamiltoniano. A partir desta relação e da equação de autovalores (14.49), podemos obter como o operador A evolui com o tempo. Tomando a derivada temporal de ambos os lados de (14.49), encontramos

$$\frac{\partial A}{\partial t} \psi + A \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{da}{dt} \psi + a \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (14.51)$$

Notar que em a usamos derivada total (o observável a é dado por $a(t) = \int d^3\vec{x} \psi^* A \psi$). Combinando (14.50) e (14.51), encontramos

$$\frac{\partial A}{\partial t} \psi - \frac{i}{\hbar} AH\psi = \frac{da}{dt} \psi - \frac{i}{\hbar} aH\psi. \quad (14.52)$$

Considerando que $aH\psi = Ha\psi = HA\psi$, onde na última passagem foi usada a relação de autovalores (14.49), temos

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, A] \right) \psi = \frac{da}{dt} \psi, \quad (14.53)$$

onde

³Adiantemos que estas funções são vetores num espaço chamado *espaço de Hilbert*.

$$[H, A] = HA - AH \quad (14.54)$$

é o *comutador* entre os operadores H e A . Para dois operadores quaisquer A e B , teríamos

$$[A, B] = AB - BA. \quad (14.55)$$

Teríamos, também, as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[B, A], \\ [A + B, C] &= [A, C] + [B, C], \\ [AB, C] &= [A, C]B + A[B, C], \\ [A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] &= 0. \end{aligned} \quad (14.56)$$

A essência do que estamos querendo apresentar nesta seção está em parte embutida na semelhança entre das expressões (14.47) e (14.56).

Voltemos à relação (14.53). Como da/dt deve ser decorrente da atuação do operador dA/dt sobre ψ , podemos, então, concluir que a evolução temporal do operador A é dada pela seguinte equação

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (14.57)$$

Como vemos, conhecendo-se a evolução temporal do estado ψ , podemos obter a evolução temporal do operador A . Da mesma forma, partindo-se de (14.57) e da equação (14.49), chega-se à equação de Schroedinger (14.50). Os dois formalismos quânticos são equivalentes. O primeiro, dado por (14.50), é também conhecido como *representação de Schroedinger* e considera a evolução temporal do sistema quântico através dos vetores de estado. O segundo, correspondente à Eq. (14.57), chama-se *representação de Heisenberg*, onde a evolução temporal é feita por intermédio dos operadores correspondentes aos observáveis. Mas o que quero destacar é o seguinte. Observe a semelhança entre as relações (14.44) e (14.57). Isto sugere que as relações quânticas devam ser obtidas das correspondentes clássicas por substituições do tipo

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \quad (14.58)$$

Isto realmente acontece. Este processo de quantização, introduzido por Dirac, é conhecido como *quantização canônica* e é estudado nos cursos de graduação, dentro do próprio curso de Mecânica Quântica.

► Exercícios

14.1. Escreva a hamiltoniana de uma partícula de massa m que é vinculada a se mover sobre uma superfície cilíndrica. Obtenha, usando as equações de Hamilton, as equações diferenciais do movimento.

14.2. Escreva a hamiltoniana para o pêndulo esférico. Obtenha as equações de movimento.

14.3*. Uma partícula de massa m e carga q encontra-se numa região onde existe um campo magnético dado por $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, onde B_0 é uma quantidade constante.

a) Mostre que o potencial relativo a este campo magnético constante é

$$\vec{A} = B_0 [(\alpha - 1)y \hat{i} + \alpha x \hat{j}],$$

onde α é um parâmetro constante qualquer.

b) Obtenha a hamiltoniana e calcule as equações de Hamilton.

c) Verifique se essas equações são as mesmas obtidas com o uso da segunda lei de Newton, e da força de Lorentz

d) Estas equações não devem depender da constante α . Você pode explicar por que isto acontece?

14.4. Mostre as relações (14.47) e (14.48).

14.5. Idem para (14.56).

14.6. Considere a variação da ação

$$S = \int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q}, t),$$

onde $\delta q_i = 0$ apenas no extremo t_0 .

a) Mostre que

$$\delta S = \sum_i \int_{t_0}^t dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t).$$

O primeiro termo corresponde à equação de movimento. O segundo termo é um termo de superfície, que aparece em virtude de $\delta q_i \neq 0$ no extremo superior. Observe que o coeficiente de $\delta q_i(t)$ deste termo é o momento conjugado à coordenada q_i . Esta é uma outra maneira de identificar o momento canônico.

b) Faça o mesmo estudo para o caso da lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$.

14.7*. Você viu que a evolução temporal de uma certa quantidade $A(q, p, t)$, definida no espaço das fases, é dada por [veja expressão (14.44)]

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

a) Considere o caso particular descrito pela hamiltoniana

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2,$$

onde a e b são parâmetros constantes. Mostre que as quantidades

$$A = q_1 q_2, \\ B = \frac{p_1 - a q_1}{q_2}.$$

são constantes.

b) Fazendo uso da identidade de Jacobi, mostre que o parêntese de Poisson entre duas quantidades constantes é também uma constante. Verifique se isto se aplica para o caso das quantidades A e B acima.

APÊNDICE A

Derivação e integração

Nesta série de dois apêndices que ora começamos, destacaremos alguns tópicos de matemática básica, essencialmente necessários ao desenvolvimento dos assuntos aqui apresentados. Não é nosso objetivo fazer um estudo profundo e abrangente. A finalidade é apresentar os conceitos mais fundamentais.

A.1 Derivação

Observe a Figura A.1. Ela corresponde a representação gráfica de uma certa função $f(x)$ versus x . Consideremos a quantidade

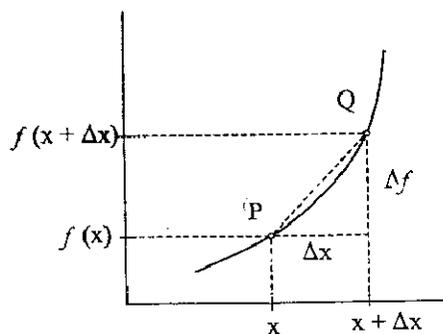
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.1})$$

Ela nos dá a razão entre a variação de $f(x)$ e a correspondente variação de x . Esta é uma quantidade média, pois, por hipótese (como mostra a figura), estamos admitindo que $f(x)$ não varia linearmente com x para todos os pontos do intervalo Δx . Pelo exemplo da Figura A.1, vemos que $f(x)$ varia mais lentamente com x próximo ao ponto P do que próximo a Q . Já para a reta que vai de P a Q esta variação é constante.

É algo importante saber o valor desta razão para cada valor da variável x . Para se conseguir isto, usamos o seguinte raciocínio: Quanto menor o intervalo Δx (e conseqüentemente Δf) mais próximo este valor médio estará do valor procurado. No caso limite, fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, teremos o valor da razão no ponto x . Esta quantidade é comumente representada por $f'(x)$ ou df/dx , onde, nesta última notação, df e dx podem ser vistos como variações infinitesimais. Assim, podemos escrever

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.2})$$

Este limite é chamado de *derivada de $f(x)$ em relação a x* . Vejamos um exemplo. Seja a função

Figura A.1: Gráfico de uma certa função de x versus x .

$$f(x) = x^2 \quad (\text{A.3})$$

Usando a relação (A.2), temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \quad (\text{A.4})$$

Então, $2x$ é o valor limite de $\Delta f/\Delta x$, quando $\Delta x \rightarrow 0$, para a função $f(x) = x^2$. Outros exemplos, bem como algumas propriedades gerais, serão apresentadas como exercícios.

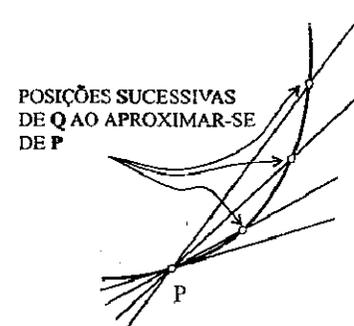
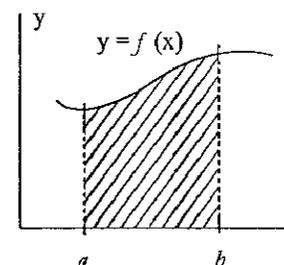
Com o intuito de uma melhor compreensão do que está sendo apresentado, vejamos o significado geométrico da derivada. Observando a relação (A.1), vemos que $\Delta f/\Delta x$ representa a tangente do ângulo formado pelo segmento de reta \overline{PQ} com o eixo x . Chamemos esta tangente simplesmente de *inclinação* da reta \overline{PQ} . Quando fazemos $\Delta x \rightarrow 0$, temos que o ponto Q se aproxima de P e, conseqüentemente, a reta que passa por PQ tende à tangente à curva no ponto P . A Figura A.2 esclarece isto. Assim, a relação (A.2) corresponde à inclinação desta reta tangente, que chamaremos de *inclinação da curva no ponto P*. Portanto, a derivada de uma função num ponto corresponde à inclinação da curva neste ponto.

A.2 Integração

Seja uma função contínua $y = f(x)$ num intervalo fechado $[a, b]$. Por hipótese, consideremos que $f(x)$ seja positiva em todo o intervalo considerado (veja Figura A.3). A parte hachurada corresponde à área subentendida pela curva e o eixo x , desde o ponto $x = a$ até o ponto $x = b$. Denotemos esta área por A_a^b .

Apresentemos agora um teorema, que não demonstraremos (é fácil aceitar sua validade), chamado *teorema do valor médio*. Ele estabelece que para uma função

Figura A.2: Interpretação geométrica da derivada.

Figura A.3: Área subentendida por uma curva e o eixo x .

$f(x)$, contínua e positiva em $a \leq x \leq b$, existe pelo menos um número entre a e b , que chamaremos de c , tal que a área acima referida é dada por (a Figura A.4 esclarece isto para o caso de $f(x)$ da figura anterior).

$$A_a^b = (b - a) f(c) \quad (\text{A.5})$$

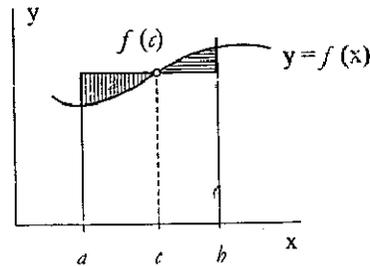
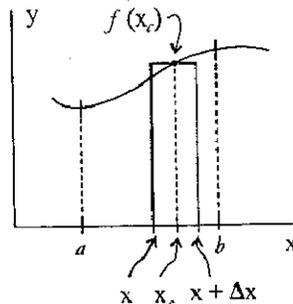
O ponto c é tal que a parte hachurada dentro da curva possui a mesma área da parte hachurada fora da curva.

Seja agora, para a mesma função $f(x)$, a área subentendida entre x e $x + \Delta x$, como mostra a Figura A.5. Pelo teorema do valor médio, esta área é dada por

$$A_x^{x+\Delta x} = f(x_c) \Delta x \quad (\text{A.6})$$

onde x_c é um ponto do intervalo entre x e $x + \Delta x$ (não é necessariamente o mesmo ponto c da Figura A.4).

Figura A.4: Explicação do teorema do valor médio.

Figura A.5: Área entre x e $x + \Delta x$.

A área entre x e $x + \Delta x$ pode ser reescrita como a diferença entre a área de a até $x + \Delta x$ e de a até x , isto é,

$$A_x^{x+\Delta x} = A_a^{x+\Delta x} - A_a^x \quad (\text{A.7})$$

que independe, como é fácil ver, do ponto a que tomamos por base. Deste modo, é fácil ver que podemos escrever também

$$A_x^{x+\Delta x} = A(x + \Delta x) - A(x) \quad (\text{A.8})$$

onde, agora, a notação $A(x)$ representa uma área, subentendida pela curva, desde um ponto arbitrário qualquer até x . $A(x)$ é, portanto, uma função de x . Escrevamos a relação anterior simplesmente como

$$A_x^{x+\Delta x} = \Delta A(x) \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.9) em (A.6), obtemos

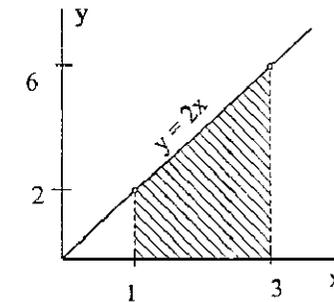
$$\Delta A(x) = f(x_c) \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = f(x_c) \quad (\text{A.10})$$

Tomando o limite desta razão quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos, pela definição de derivada

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = A'(x) = f(x) \quad (\text{A.11})$$

Assim, chegamos a um importante resultado: A função $A(x)$, definida como a área subentendida pela curva $f(x)$ e o eixo x , a partir de um ponto arbitrário até x , possui derivada em relação a x justamente igual à própria função $f(x)$.

Seja um exemplo. Vamos calcular a área formada pela reta $y = 2x$ e o eixo x desde $x = 1$ até $x = 3$. A Figura A.6 mostra estes dados.

Figura A.6: Exemplo com a função $y = 2x$.

Como é fácil ver, a área que queremos calcular é a de um trapézio. Diretamente, temos que esta área vale 8 (unidades de área). Vamos confirmar este resultado através do processo que acabamos de estudar. Pelo que vimos, $A(x)$ é uma função cuja derivada dá $f(x)$. Tendo em conta que, no caso, $f(x) = 2x$, temos

$$A(x) = x^2 + C \quad (\text{A.12})$$

Destaqueemos, mais uma vez, que $A(x)$ é a área subentendida pela curva $f(x)$ (no caso, $2x$) e o eixo x , desde um ponto arbitrário até x . A presença da constante C encerra justamente esta arbitrariedade na escolha do ponto inicial.

A área desde $x = 1$ até $x = 3$ é então dada por

$$A_1^3 = A(3) - A(1) = (3^2 + C) - (1^2 + C) = 8$$

Como não podia deixar de ser, o resultado é independente da constante C .

Observe agora o seguinte: se a área fosse de $x = -3$ até $x = 3$, teríamos, usando diretamente a relação (A.12)

$$A_{-3}^3 = [(-3)^2 + C] - (3^2 + C) = 0 \quad (!)$$

Isto se deve porque a área abaixo do eixo x é negativa (veja Figura A.7). Então, no caso do cálculo de áreas, pura e simplesmente (que é o que estamos fazendo agora), temos de atentar para este detalhe e tomar o módulo para as regiões negativas. Assim, a área marcada na Figura A.7 seria

$$\text{Área} = -[A(-3) - A(0)] + [A(3) - A(0)] = 18$$

O que estamos discutindo nada mais é do que o processo de cálculo chamado *integração*. Essencialmente, ele está contido na relação (A.11), ou seja, se tivermos

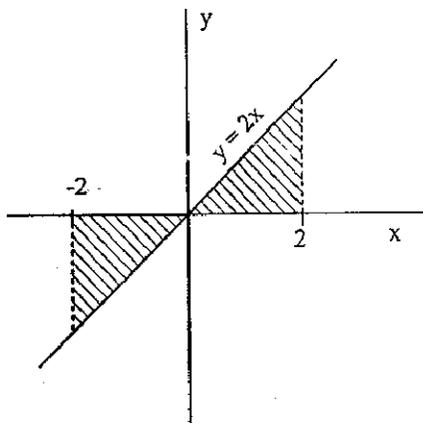
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (\text{A.13})$$

A função $F(x)$ é uma função cuja derivada em relação a x dá $f(x)$ (as outras funções seriam como já sabemos $F(x) + \text{constante}$). O cálculo integral consiste justamente em conhecendo $f(x)$ obter a família de soluções $F(x) + C$. Em símbolos, isto é escrito da seguinte maneira

$$F(x) + C = \int f(x) dx \quad (\text{A.14})$$

O símbolo $\int \dots dx$ pode ser visto como a pergunta: Qual a função cuja derivada em relação a x dá ...?

Figura A.7: Trecho com área negativa.



Por outro lado, pelo que já vimos nesta seção, este símbolo pode ter outro significado, que é o de somatório. Lembremos de que $F(x) + C$ representa a área entre $f(x)$

e o eixo x desde um ponto arbitrário (esta arbitrariedade está embutida na constante C) até x . Assim, $\int f(x) dx$ pode ser visto como o caso limite de somatório de infinitos retângulos de área $f(x) dx$ (veja Figura A.5). Especificando os pontos inicial e final, não há necessidade da constante C . Isto é feito da seguinte maneira

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{A.15})$$

que corresponde à área subentendida pela curva $f(x)$ e o eixo x , desde $x = a$ até $x = b$.

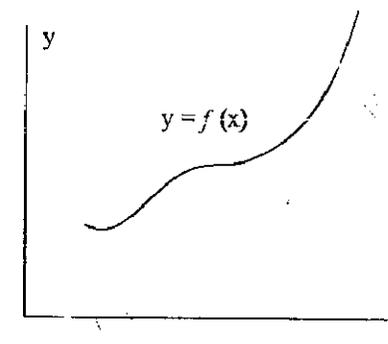
Para finalizar, vamos fazer um resumo comparativo entre derivada e integral. Seja uma certa função contínua $f(x)$ cujo gráfico pode ser o da Figura A.8. Vimos que a derivada de $f(x)$ num ponto x_0 corresponde à inclinação da curva neste ponto. Já a função cuja derivada vale $f(x)$, que podemos chamar de $F(x) + C$, representa a área sob a curva $f(x)$ e o eixo x desde um ponto qualquer até x (a arbitrariedade está embutida na constante C). A notação que usamos para isto é

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

A área sob a curva desde $x = a$ até $x = b$ é dada por $F(b) - F(a)$. Isto é representado por

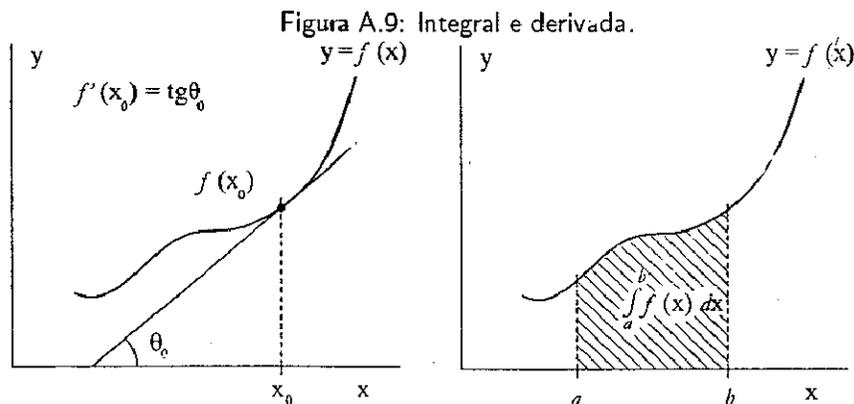
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Figura A.8: Gráfico de uma certa função de x .



Devido à interpretação de que $\int_a^b f(x) dx$ dá a área subentendida pela curva $f(x)$ e o eixo x desde $x = a$ até $x = b$, podemos interpretar a quantidade $f(x) dx$ como a área infinitesimal de um retângulo de altura $f(x)$ e largura dx . Neste caso, o símbolo \int_a^b

representa um somatório infinito destas quantidades infinitesimais desde $x = a$ até $x = b$. Veja a Figura A.9.



► Exercícios

A.1. Mostre que se

- a) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x)$;
 b) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$;
 c) $f(x) = \text{const.} \Rightarrow f'(x) = 0$;
 d) $f(x) = a g(x) \Rightarrow f'(x) = a g'(x)$ ($a = \text{constante}$);
 e) $f(x) = g(x) h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$;
 f) $f = f(\theta)$ e $\theta = \theta(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}$.

A.2. Ache a derivada das seguintes funções em relação às variáveis correspondentes

- a) $x^2 + 1$ g) $2x^3$
 b) $2x + x^3/2$ h) $1/x$
 c) $\frac{2}{x+1}$ i) \sqrt{x}
 d) $1/\sqrt{x}$ j) xe^x
 e) $t^{-2} + 2t$ k) $\text{sen } \theta$
 f) $\cos \theta$ l) e^x

A.3. Mostre que a reta $y = -x$ é tangente à curva dada pela equação $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Achar o ponto de tangência. Idem para a reta $y = 9x - 15$ em relação à curva $y = x^3 - 3x + 1$.

A.4. Mostre que as curvas $y = 3x^2$ e $y = 2x^3 + 1$ têm em comum a reta tangente no ponto $(1, 3)$.

A.5. Calcule os pontos de máximo, mínimo e de inflexão (ponto onde a curva muda de concavidade) das curvas abaixo.

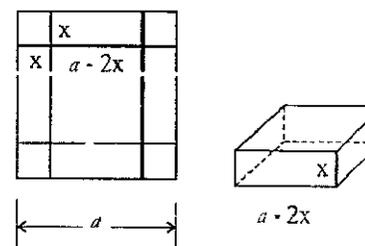
- a) $y = 6 - 2x - x^2$ d) $y = 2x^2 - 4x + 3$
 b) $y = 12 - 12x + x^3$ e) $y = x^4 - 32x + 48$
 c) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

A.6. Determine dois números positivos tais que a soma seja 20 e o produto o maior possível.

A.7. Deseja-se construir um recipiente com a forma de um cilindro reto, para conter um certo volume. Qual o relacionamento entre a altura e o raio da base que proporcionará uma maior economia de material?

A.8. Com uma folha de papel de forma quadrada de lado a , deseja-se construir uma caixa (sem tampa) cortando-se um pequeno quadrado de cada um dos cantos e dobrando-se para cima os lados. Veja a Figura A.10. Quais são as dimensões dos quadrados a serem cortados para que o volume da caixa seja o maior possível?

Figura A.10: Exercício 8.



A.9. Calcule a área subentendida pela curva $y = x^2$ e o eixo x desde $x = -1$ até $x = 2$.

A.10. Idem para a curva $y = x^3$.

A.11. Calcule a área de um círculo de raio R . Calcule a área e o volume de uma esfera com o mesmo raio.

A.12. Calcule a área de uma elipse de eixos a e b .

A.13. Calcule as seguintes integrais:

- $\int (3x^2 + 5x) dx$
- $\int x^m dx$
- $\int e^{2x} dx$
- $\int \sqrt{1-x^2} dx$
- $\int \sqrt{1+x^2} dx$
- $\int \cos \theta d\theta$
- $\int x^{-1} dx$
- $\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta$
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta$
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta$
- $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
- $\int_0^1 x^2 e^x dx$

APÊNDICE B

Vetores e tensores

B.1 Preliminares

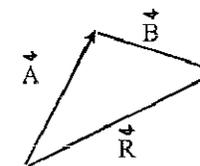
B.1.1 Adição de vetores

Seja \vec{R} o resultado da adição entre dois vetores \vec{A} e \vec{B} , isto é

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad (\text{B.1})$$

O vetor \vec{R} é dito ser a *resultante* entre os vetores \vec{A} e \vec{B} . A Figura B.1 mostra um exemplo de tal soma.

Figura B.1: Adição de vetores.



A soma vetorial apresenta as seguintes propriedades:

- Associatividade: $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$
- Comutatividade: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

B.1.2 Multiplicação de um vetor por um escalar

Seja o produto de um vetor \vec{v} por um escalar λ , dando um vetor \vec{V} , isto é

$$\vec{V} = \lambda \vec{v} \quad (\text{B.2})$$

O vetor \vec{V} possui a mesma direção do vetor \vec{v} . Seu sentido será o mesmo se λ for positivo e será contrário se λ for negativo. O módulo de \vec{V} é λ vezes o módulo de \vec{v} . Mostramos alguns exemplos na Figura B.2.

Podemos representar um vetor qualquer através de um *vetor unitário* (vetor de módulo um). Veja a Figura B.3.

$$\vec{A} = A \hat{u} \quad (\text{B.3})$$

Onde A é o módulo do vetor \vec{A} , isto é, $A = |\vec{A}|$. \hat{u} é o vetor unitário (denotaremos vetores unitários com um chapéu). Conseqüentemente, $|\hat{u}| = 1$.

Figura B.2: Multiplicação de um vetor por um escalar.

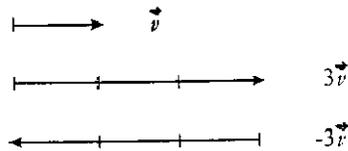
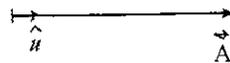


Figura B.3: Vetor unitário.



B.1.3 Representação de um vetor através das componentes num sistema de eixos ortogonais

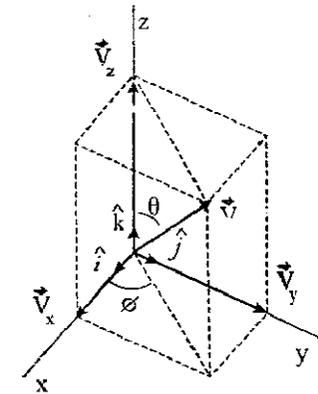
Seja um sistema de eixos ortogonais x , y e z . Consideremos \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} os respectivos unitários. Vamos decompor um vetor \vec{V} ao longo desses eixos, como mostra a Figura B.4. Pelo que vimos nas subseções acima podemos escrever

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\begin{aligned} V_x &= V \sin \theta \cos \phi \\ V_y &= V \sin \theta \sin \phi \\ V_z &= V \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Figura B.4: Vetor decomposto em eixos ortogonais.



Como \vec{V} é a diagonal do paralelepípedo formado por \vec{V}_x , \vec{V}_y e \vec{V}_z , podemos diretamente escrever o módulo de \vec{V} através dos módulos das componentes.

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad (\text{B.6})$$

B.2 Produtos escalar e vetorial

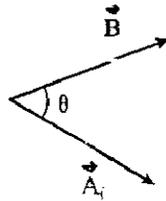
Sejam \vec{A} e \vec{B} dois vetores, fazendo um ângulo θ entre si, como mostra a Figura B.5.

O *produto escalar* entre os vetores \vec{A} e \vec{B} , denotado por $\vec{A} \cdot \vec{B}$, é definido por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (\text{B.7})$$

O resultado do produto escalar é um escalar e é fácil ver que ele apresenta as seguintes propriedades:

- Comutatividade: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Distributividade: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Figura B.5: Vetores \vec{A} e \vec{B} formando um ângulo θ .

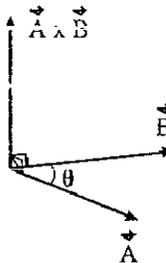
O produto vetorial entre os vetores \vec{A} e \vec{B} , denotado por $\vec{A} \times \vec{B}$, é um vetor¹ cujo módulo é definido por

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (\text{B.8})$$

e cujo sentido é dado como mostra a Figura B.6. Ele apresenta as seguintes propriedades:

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (não é comutativo)
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ (distributivo)

Figura B.6: Produto vetorial.



B.3 Produtos escalar e vetorial algebricamente

Em lugar de designar os eixos coordenados ortogonais por x , y e z , chamemo-los por 1, 2 e 3. Seja então \hat{e}_i o unitário correspondente ao eixo i ($i=1,2,3$). Podemos escrever

¹Na verdade, é um pseudo-vetor pois $\vec{A} \times \vec{B}$ não muda de sinal quando os eixos coordenados são invertidos.

os produtos escalar e vetorial entre \hat{e}_i e \hat{e}_j da seguinte maneira

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (\text{B.10})$$

onde as quantidades δ_{ij} e ϵ_{ijk} são chamadas de *delta de Kronecker* e *tensor de Levi-Civita*, respectivamente, e são definidas da seguinte maneira

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ permutação cíclica } 1,2,3 \\ -1 & \dots \text{ não cíclica de } 1,2,3 \\ 0 & \text{dois ou mais índices iguais} \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Com isto, os produtos escalar e vetorial entre dois vetores \vec{A} e \vec{B} são dados por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (\text{B.13})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k \quad (\text{B.14})$$

Há uma certa característica nos índices de soma conforme podemos observar nas relações (B.10), (B.13) e (B.14): Eles aparecem sempre repetidos duas vezes. Assim, não é necessário escrever o símbolo de somatório nestes casos pois dois índices repetidos já subentendem soma nestes índices. Com esta convenção, também chamada *convenção de Einstein*, as relações acima mencionadas podem ser escritas simplesmente como

$$\begin{aligned} \hat{e}_i \times \hat{e}_j &= \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_i B_i \\ \vec{A} \times \vec{B} &= \epsilon_{ijk} A_i B_j \hat{e}_k \end{aligned}$$

Muitas identidades vetoriais são demonstradas com o uso de uma importante relação

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (\text{B.15})$$

Notar que no lado esquerdo, pela convenção adotada, está somando no índice k . Podemos diretamente verificar que esta relação é verdadeira substituindo valores para i, j, l e m . Vamos usar (B.15) para demonstrar que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (\text{B.16})$$

Observe então

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \epsilon_{ijk} A_i (\vec{B} \times \vec{C})_j \hat{e}_k = \epsilon_{ijk} A_i \epsilon_{lmj} B_l C_m \hat{e}_k \\ &= \epsilon_{kij} \epsilon_{jlm} A_i B_l C_m \hat{e}_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) A_i B_l C_m \hat{e}_k \\ &= A_i B_k C_i \hat{e}_k - A_i B_i C_k \hat{e}_k \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \end{aligned}$$

Outras demonstrações serão pedidas nos exercícios.

B.4 Operadores diferenciais

Os operadores diferenciais atuam sobre *campos escalares* ou *campos vetoriais* podendo resultar campos escalares ou campos vetoriais, dependendo do tipo de operador. Chama-se campo escalar a quantidade que associa um escalar a cada ponto do espaço, e campo vetorial quando associa um vetor.

B.4.1 Gradiente

O gradiente é um operador diferencial que atua sobre campos escalares. Seja $\phi(\vec{r})$ um campo escalar qualquer. O gradiente de ϕ , que representaremos por $\text{grad } \phi$ ou $\nabla \phi$, é um campo vetorial e é definido através da relação

$$\text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = d\phi \quad (\text{B.17})$$

onde $d\phi$ é a variação diferencial em ϕ correspondente a uma variação em \vec{r} de $d\vec{r}$, isto é,

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) \quad (\text{B.18})$$

B.4.2 Divergência

A divergência é um operador diferencial que atua sobre um campo vetorial. Seja $\vec{f}(\vec{r})$ um campo vetorial qualquer. A divergência de \vec{f} , que representaremos por $\text{div } \vec{f}$ ou $\nabla \cdot \vec{f}$ é definida por

$$\text{div } \vec{f} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} \quad (\text{B.19})$$

onde V é o volume limitado pela superfície fechada S . Como notamos, $\text{div } \vec{f}$ é um campo escalar.

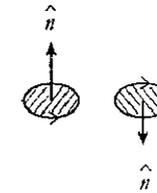
B.4.3 Rotacional

O rotacional é um operador diferencial que atua sobre um campo vetorial. A definição do operador rotacional é dada por

$$(\text{rot } \vec{f}) \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (\text{B.20})$$

onde S é uma superfície limitada pela curva fechada C . \hat{n} é um unitário normal à superfície infinitesimal $S \rightarrow 0$. Seu sentido depende do percurso de integração, como mostra a Figura B.7

Figura B.7: Sentidos do unitário \hat{n} .



Vejam algumas observações:

(i) As definições de gradiente, divergência e rotacional, dadas por (B.17), (B.19) e (B.20), independem do tipo de coordenadas utilizadas. Para o caso particular de coordenadas cartesianas, temos as seguintes relações (que são facilmente demonstradas)

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \quad (\text{B.21})$$

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (\text{B.22})$$

$$\text{rot } \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (\text{B.23})$$

(ii) Usando a convenção de Einstein, podemos escrever as relações anteriores simplesmente como

$$\text{grad } \phi = \partial_i \phi \hat{e}_i \quad (\text{B.24})$$

$$\text{div } \vec{f} = \partial_i f_i \quad (\text{B.25})$$

$$\text{rot } \vec{f} = \epsilon_{ijk} \partial_i f_j \hat{e}_k \quad (\text{B.26})$$

onde

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{B.27})$$

Com isto, fica fácil a demonstração de várias identidades, usando o que vimos na seção anterior. Por exemplo, vamos demonstrar que

$$\text{div}(\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot \text{rot} \vec{f} - \vec{f} \cdot \text{rot} \vec{g} \quad (\text{B.28})$$

Eutão,

$$\text{div}(\vec{f} \times \vec{g}) = \partial_i (\vec{f} \times \vec{g})_i = \partial_i (\epsilon_{jki} f_j g_k) = \epsilon_{jki} \partial_i f_j g_k - \epsilon_{jki} f_j \partial_i g_k = \vec{g} \cdot \text{rot} \vec{f} - \vec{f} \cdot \text{rot} \vec{g}$$

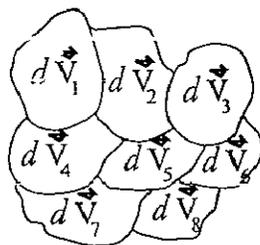
Outras demonstrações serão pedidas nos exercícios.

(iii) Há duas importantes relações integrais que podem ser obtidas das definições de divergência e rotacional. Pela definição de divergência, dada por (B.19), podemos escrever

$$\text{div} \vec{f} dV = \vec{f} \cdot d\vec{S}' \quad (\text{B.29})$$

onde S' é a superfície fechada que limita o volume infinitesimal dV . Consideremos agora um certo volume finito V . Dividamos este volume em infinitos elementos dV . Exageradamente, a Figura B.8 mostra alguns destes elementos.

Figura B.8: Alguns dos elementos de volume em que foi dividido o volume V .



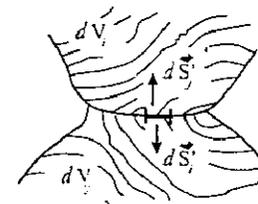
Ao somarmos todas as contribuições, as superfícies internas não contribuirão. Notar que elas são sempre comuns a dois elementos de volume. Para um destes elementos, $d\vec{S}'$ está num sentido e para o outro, em sentido contrário (a Figura B.9 esclare o que foi dito). Portanto,

$$\int_V \text{div} \vec{f} dV = \oint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} \quad (\text{B.30})$$

onde S é a superfície fechada que limita o volume V . A relação acima é conhecida como *teorema de Gauss* ou *teorema da divergência*.

Note a interessante particularidade desta relação. No lado esquerdo, temos que a integração é feita por todos os pontos no interior do volume V . Já o lado direito dá-nos que esta mesma integração pode ser feita considerando-se apenas os pontos da superfície que limitam o volume V .

Figura B.9: A integração nas superfícies internas não contribuem.



A outra relação integral é obtida considerando-se a definição de rotacional dada por (B.20) e tendo em conta o conceito de elemento de superfície $d\vec{S}$ (veja Figura B.7). Temos então,

$$(\text{rot} \vec{f}) \cdot d\vec{S} = \oint_{C'} \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (\text{B.31})$$

onde C' é a linha que limita a superfície infinitesimal $d\vec{S}$. Através de raciocínio semelhante ao desenvolvido anteriormente para obtenção do teorema de Gauss, podemos facilmente obter que

$$\int_S (\text{rot} \vec{f}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (\text{B.32})$$

onde S é uma superfície limitada pela curva fechada C . A relação acima é conhecida como *teorema de Stokes*.

B.5 Tensor

Nas seções anteriores, vimos que vetores são quantidades que possuem módulo, direção e sentido. Isto é verdade, mas nem tudo que possui essas características pode ser classificado como vetor. Como exemplo, temos as rotações, a quem podemos associar módulo, direção e sentido e não são vetores (exceção feita para rotações infinitesimais)².

²É fácil ver que duas rotações finitas não possuem, de maneira geral, a propriedade de comutatividade, que é uma propriedade inerente da soma vetorial. Maiores detalhes sobre isto, bem como sobre rotações de uma maneira geral, podem ser vistas diretamente no estudo do corpo rígido, Capítulos 10 e 13.

Vamos nesta seção apresentar uma conceituação mais apropriada para identificar um vetor. Seja o conjunto formado por quantidades que chamaremos de V_x , V_y e V_z , que são quantidades referidas a um certo sistema de eixos x , y e z . Em lugar desta notação, passemos a usar V_1 , V_2 e V_3 . Este conjunto para formar um vetor deve satisfazer a certas condições. Consideremos uma rotação no sistema de coordenadas ou inversão de eixos (transformação de paridade), passando para x' , y' e z' . Em relação a este novo sistema, o conjunto acima passa a ser denotado por V'_1 , V'_2 e V'_3 . Este conjunto formará um vetor se

$$V'_a = \sum_{b=1}^3 A_{ab} V_b, \quad a, b = 1, 2, 3 \quad (\text{B.33})$$

onde as quantidades A_{ab} devem satisfazer

$$\sum_{a=1}^3 A_{ab} A_{ac} = \delta_{bc} \quad (\text{B.34})$$

δ_{bc} é o delta de Kronecker, definido em (B.11).

A condição dada por (B.34) decorre do fato de o módulo de um vetor ser invariante nas rotações do sistema de coordenadas. Isto é obtido facilmente

$$\sum_{a=1}^3 V'_a V'_a = \sum_{a=1}^3 \left(\sum_{b=1}^3 A_{ab} V_b \right) \left(\sum_{c=1}^3 A_{ac} V_c \right) = \sum_{a,b,c=1}^3 A_{ab} A_{ac} V_b V_c \quad (\text{B.35})$$

Como vemos, para termos

$$\sum_{a=1}^3 V'_a V'_a = \sum_{b=1}^3 V_b V_b \quad (\text{B.36})$$

é preciso que a condição (B.34) seja satisfeita. Ela é também chamada de *condição de ortogonalidade* e nada mais é do que a conhecida definição de matriz ortogonal. Vejamos isto também

$$\sum_{a=1}^3 A_{ab} A_{ac} = \sum_{a=1}^3 \tilde{A}_{ba} A_{ac} = (\tilde{A}A)_{bc} = \delta_{bc} \quad (\text{B.37})$$

Logo,

$$\tilde{A}A = 1 \implies \tilde{A} = A^{-1} \quad (\text{B.38})$$

As quantidades A_{ab} , que são os elementos de matriz que transformam um vetor referido a um sistema x , y e z para um sistema x' , y' e z' , rodado em relação ao primeiro, devem ser expressas, é claro, em termos dos ângulos que caracterizam a rotação (veja Seção 10.5).

O conceito de tensor é uma extensão do conceito de vetor, apresentado pelas relações (B.33) e (B.34). Um tensor de segunda ordem é um conjunto de quantidades T_{ab} satisfazendo a relação de transformação

$$T'_{ab} = \sum_{c,d=1}^3 A_{ac} A_{bd} T_{cd} \quad (\text{B.39})$$

Para um tensor de terceira ordem, teríamos

$$T'_{abc} = \sum_{d,e,f=1}^3 A_{ad} A_{be} A_{cf} T_{def} \quad (\text{B.40})$$

E assim por diante. Em todos os casos, a relação (B.34) deve ser sempre satisfeita.

► Exercícios

B.1. Dados os vetores $\vec{A} = \hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ e $\vec{C} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$. Determine:

- $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ (resultante entre \vec{A} , \vec{B} e \vec{C}),
- $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ (resultante entre \vec{A} , $-\vec{B}$ e \vec{C}),
- o módulo de \vec{A} ,
- o módulo de \vec{B} ,
- o módulo de $\vec{A} + \vec{B}$,
- os ângulos formados por \vec{A} com os x , y e z ,
- o unitário paralelo à resultante entre \vec{A} e \vec{B} .

B.2. Usando vetores, calcule a distância entre os pontos $P = (4, 5, -7)$ e $Q = (-3, 6, 12)$.

B.3. Provar que a reta que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralela ao terceiro lado e igual à metade deste.

B.4. Provar que ligando-se os pontos médios dos lados consecutivos de um quadrilátero qualquer, a figura resultante é um paralelogramo.

B.5. Seja O um ponto qualquer no interior de um triângulo A, B, C e sejam P, Q, R os pontos que dividem ao meio os lados AB , BC e CA , respectivamente. Provar que $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}$. Esta igualdade persiste se o ponto O for exterior ao triângulo?

B.6. Sob que condições o produto escalar é zero?

B.7. Escreva o módulo de um vetor através do produto escalar.

B.8. Sendo \vec{C} a resultante entre os vetores \vec{A} e \vec{B} , mostre que $C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$, sendo θ o ângulo formado por \vec{A} e \vec{B} .

B.9. Mostre que para se projetar um vetor numa certa direção basta multiplicá-lo escalarmente pelo unitário característico da direção.

B.10. Considerando os vetores \vec{A} , \vec{B} e \vec{C} do exercício 1, calcule:

- $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$ e verifique a propriedade distributiva.
- o ângulo formado entre \vec{A} e \vec{B} e entre \vec{B} e $\vec{A} + \vec{C}$;
- os módulos de \vec{A} , de \vec{B} e de $\vec{A} + \vec{C}$;
- a projeção do vetor $\vec{A} + \vec{B}$ sobre o vetor \vec{C} ;
- os ângulos formados por \vec{A} com x , y e z .

B.11. Determine o valor de a tal que $\vec{A} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ sejam perpendiculares.

B.12. Mostre que os vetores $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ e $\vec{C} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ formam um triângulo e que este triângulo é retângulo.

B.13. Provar que as diagonais de um losângo são perpendiculares.

B.14. Determine o ângulo formado por duas diagonais internas de um cubo.

B.15. Provar que qualquer triângulo inscrito num semicírculo é retângulo, onde a hipotenusa é o diâmetro do semicírculo.

B.16. Mostre que o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$, escrito em termos das componentes, é dado por $\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$, que também pode ser expresso por um determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

B.17. Dados $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$,

- calcule $\vec{A} \times \vec{B}$ (veja exercício anterior);
- confirme que realmente $\vec{A} \times \vec{B}$ é perpendicular a \vec{A} e \vec{B} , mostrando que $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$ e $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$.

B.18. Mostre que $|\vec{A} \times \vec{B}|$ corresponde à área do paralelogramo formado pelos vetores \vec{A} e \vec{B} .

B.19. Com o uso do produto vetorial, deduza a chamada lei dos senos, isto é, para um triângulo qualquer formado pelos lados A , B e C tem-se

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

onde α , β e γ são os ângulos opostos aos lados A , B e C , respectivamente.

B.20. Usando os conceitos de produtos escalar e vetorial, obtenha as conhecidas relações trigonométricas:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

B.21. Se $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ e $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, achar um vetor que tenha módulo 5 e que seja perpendicular aos vetores \vec{A} e \vec{B} .

B.22. Se \vec{A} é um vetor constante e $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, mostre que $(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{A} = 0$ e $(\vec{r} - \vec{A}) \cdot \vec{r} = 0$ são as equações de um plano e uma esfera, respectivamente.

B.23. Mostrar que $\text{grad } \phi$ é perpendicular à superfície equipotencial que passa pelo ponto onde $\text{grad } \phi$ é tomado.

B.24. Utilize a relação (B.15), quando for necessário, para demonstrar as seguintes identidades vetoriais:

$$a) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$b) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$c) \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$$

$$d) \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$e) \text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$$

$$f) \text{div}(\phi \vec{F}) = \phi \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } \phi$$

$$g) \text{div rot } \vec{F} = 0$$

$$h) \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{F} \times \text{rot } \vec{G} + \vec{G} \times \text{rot } \vec{F}$$

$$i) \text{rot}(\phi \vec{F}) = \phi \text{rot } \vec{F} + \text{grad } \phi \wedge \vec{F}$$

$$j) \text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} \text{div } \vec{G} - \vec{G} \text{div } \vec{F} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$$

$$k) \text{rot rot } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$$

$$l) \text{rot grad } \phi = 0$$

B.25. Mostrar que o delta de Kronecker é um tensor de segunda ordem. No Capítulo 13 é visto que o tensor de Levi-Civita é, na verdade, um pseudotensor de terceira ordem.

APÊNDICE C

Resolução de alguns exercícios

Exercício 1.1

Considerando que o movimento ocorra sobre o eixo x , temos (não há necessidade de usar a notação vetorial, pois já fica implícito que a direção é o eixo x e o sentido fica a menos de um sinal)

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (\text{C.1})$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (\text{C.2})$$

Como a aceleração é constante, podemos diretamente obter de (C.2) a solução para v ,

$$v(t) = at + c_1$$

onde c_1 é uma constante que, como vemos, corresponde à velocidade no instante $t = 0$. Chamando a velocidade neste instante de v_0 , temos a conhecida relação

$$v(t) = v_0 + at \quad (\text{C.3})$$

Usando este resultado na relação (C.1), temos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

O que também nos permite obter diretamente a solução para x .

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + c_2$$

onde a constante c_2 é identificada como a posição no instante $t = 0$. Chamando esta quantidade de x_0 , temos

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (\text{C.4})$$

Exercício 1.5

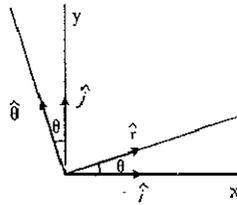
Os itens a e b são dados por

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} \quad (\text{C.5})$$

$$\vec{r} = r \hat{r} \quad (\text{C.6})$$

c) Para escrever \hat{r} e $\hat{\theta}$ em termos dos unitários \hat{i} e \hat{j} , temos de decompô-los ao longo dessas direções (veja figura)

Figura C.1: Exercício 1.5.



$$\hat{r} = |\hat{r}| \cos \theta \hat{i} + |\hat{r}| \sin \theta \hat{j} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (\text{C.7})$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (\text{C.8})$$

d) Analogamente, decompondo \hat{i} e \hat{j} ao longo das direções de \hat{r} e $\hat{\theta}$, temos

$$\hat{i} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \quad (\text{C.9})$$

$$\hat{j} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \quad (\text{C.10})$$

As expressões da velocidade e aceleração em termos de r , θ , \hat{r} e $\hat{\theta}$ são obtidas diretamente, a partir do que já temos acima. Partindo convenientemente de (C.5), pois os vetores unitários não variam com o tempo, temos

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}) \\ &= \dot{r} \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \dot{\theta} \hat{i} + \dot{r} \sin \theta \hat{j} + r \cos \theta \dot{\theta} \hat{j} \\ &= \dot{r} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) + r \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Usando agora (C.11), vem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

Considerando as expressões para $\frac{d\hat{r}}{dt}$ e $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$, dadas por (C.7) e (C.8), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = -\dot{\theta} \hat{\theta} \\ \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \dots = \dot{\theta} \hat{r} \end{aligned}$$

Usando essas expressões no resultado anterior, temos

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\theta} \quad (\text{C.12})$$

Exercício 1.6

Usando a regra da cadeia de derivação, podemos escrever

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -2x \Rightarrow v dv = -2x dx$$

Assim, usando as condições de contorno do problema, temos

$$\int_4^v v dv = -2 \int_0^x x dx \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - 16) = -x^2 \Rightarrow v = \sqrt{16 - 2x^2}$$

Exercício 3.5

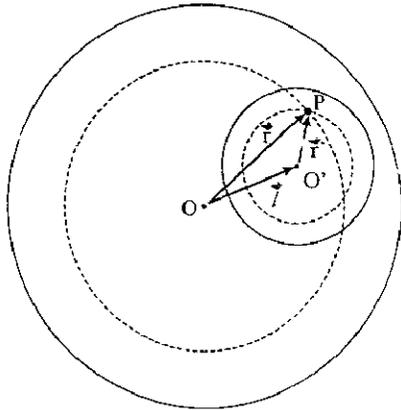
Consideremos que a distribuição de massa apresentada seja a superposição de duas esferas, ambas possuindo densidade de massa uniforme, a da maior sendo ρ e a da menor, $-\rho$ (o buraco, portanto, corresponde à região de superposição de massas ρ e $-\rho$).

Seja um ponto P dentro do buraco, como mostra a figura. O campo gravitacional criado por cada uma das esferas no ponto P é dado por

$$\vec{a} = -G \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} \hat{r} = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}$$

$$\vec{g}' = -G \frac{(-\rho) \frac{4}{3}\pi r'^3}{r'^2} \hat{r}' = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}'$$

Figura C.2: Exercício 3.5.



O campo gravitacional no ponto P será a soma dessas duas contribuições

$$\vec{g} + \vec{g}' = \frac{4}{3}\pi G \rho (\vec{r}' - \vec{r}) = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}$$

Como vemos, o campo gravitacional dentro do buraco só depende da distância entre os centros da esfera e do buraco. Ele é uma constante que independe do tamanho dos raios da esfera e do buraco!

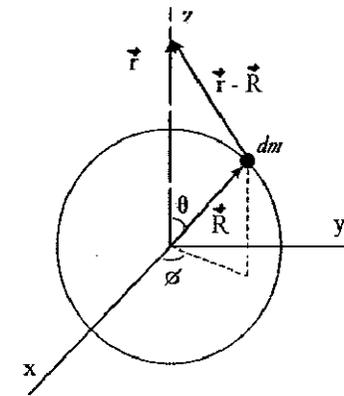
Exercício 3.9

Sem perda de generalidade, vamos tomar o ponto onde queremos calcular o campo gravitacional sobre o eixo z . A contribuição para o campo gravitacional devido a um elemento de massa dm da superfície da casca é dado por (veja figura)

$$d\vec{g} = -G \frac{dm}{(\vec{r} - \vec{R})^3} (\vec{r} - \vec{R}) \quad (\text{C.13})$$

onde

Figura C.3: Exercício 3.9.



$$dm = \frac{M}{4\pi R^2} (R d\theta)(R \sin \theta d\phi) = \frac{M}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi \quad (\text{C.14})$$

$$(\vec{r} - \vec{R})^3 = \left[(\vec{r} - \vec{R})^2 \right]^{3/2} = (r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2} \quad (\text{C.15})$$

Substituindo (C.14) e (C.15) em (C.13), temos

$$d\vec{g} = -G \frac{M}{4\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} (\vec{r} - \vec{R})$$

Decompondo o vetor \vec{R} em componentes paralela e perpendicular a z , vemos que a contribuição da componente perpendicular não contribuirá quando integramos em ϕ . Assim,

$$\vec{g} = -\frac{GM}{2} \hat{r} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}} + \frac{GMR}{2} \hat{r} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta}{[R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta]^{3/2}}$$

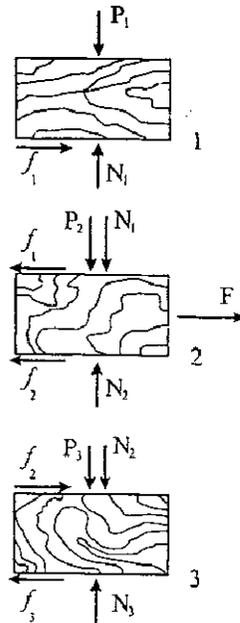
Estas são precisamente as mesmas integrais que aparecem na expressão (3.45). Daqui para a frente, os passos são os mesmos daquela oportunidade.

Exercício 4.1

a) A figura abaixo contém o isolamento dos corpos. Ao se fazer isto, na aplicação da terceira lei de Newton, pode-se ter dúvidas quanto ao sentido correto das forças. Não

há problema algum. Especifica-se um sentido arbitrário e deixa-se que a solução do problema mostre o sentido correto.

Figura C.4: Exercício 4.1.



Os dados de que dispomos são

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 = P_3 = 50 \text{ N} \\ N_1 &= 50 \text{ N} \\ N_2 &= 100 \text{ N} \\ N_3 &= 150 \text{ N} \end{aligned}$$

É importante observar que embora tenhamos colocado a força \vec{f}_1 ela não existe necessariamente. Ela só existirá se o sistema entrar em movimento. Isto é facilmente percebido observando o corpo 1 isoladamente. Só tem sentido a força \vec{f}_1 se ele estiver em movimento. Então, para que o corpo 2 entre em movimento deveremos ter $F > f_{2\text{máx}}$ (força de atrito estático máxima).

$$f_{2\text{máx}} = 0,2 \times 100 = 20 \text{ N}$$

O corpo 2 entra em movimento! Precisamos, agora, saber se o corpo 1 movimentar-se junto com o corpo 2 ou desliza sobre ele. Ele movimentar-se-á juntamente com 2 se a força de atrito f_1 não atingir o valor máximo. Já quanto ao corpo 3, não há dúvidas, ele nunca entrará em movimento, pois $f_{3\text{máx}} > f_{2\text{máx}}$. O corpo 2 sempre desliza sobre o corpo 3.

Façamos a hipótese de que os corpos 1 e 2 estejam caminhando juntos e calculemos qual a força \vec{F}_1 necessária para que isto seja possível. Se ela for maior que 10 N (valor de $f_{1\text{máx}}$) será impossível termos 1 e 2 caminhando juntos. Temos, então,

$$\text{Corpo 1: } f_1 = Ma$$

$$\text{Corpo 2: } F - f_1 - f_{2c} = Ma$$

Onde usamos que a força de atrito entre 2 e 3 é cinética pois sabemos que o corpo 2 está deslizando sobre o corpo 3. Resolvendo o sistema formado por essas relações, diretamente encontramos

$$f_1 = 7,5 \text{ N}$$

Portanto, f_1 não atingiu o seu valor máximo (que é de 10 N). O corpo 1 está se deslocando junto com 2. As acelerações dos três blocos são, portanto,

$$a_1 = a_2 = \frac{7,5}{5} = 1,5 \text{ m/s}^2 \quad a_3 = 0$$

b) Considerando $F = 50 \text{ N}$, temos, usando a mesma hipótese acima,

$$2f_1 = 50 - 0,1 \times 100 \Rightarrow f_1 = 20 \text{ N}$$

O que é impossível, pois $f_{1\text{máx}}$ é 10 N. Assim, para a força $F = 50 \text{ N}$, é impossível os corpos 1 e 2 deslocarem-se juntos. O corpo 1 desliza sobre 2 com uma força $f_{1c} = 0,1 \times 50 = 5 \text{ N}$. A aceleração do corpo 1 vale

$$a_1 = \frac{5}{5} = 1 \text{ m/s}^2$$

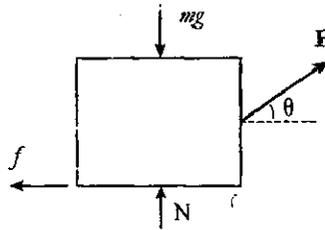
Quanto ao corpo 2, temos

$$\begin{aligned} F - f_{1c} - f_{2c} &= Ma_2 \\ 50 - 5 - 10 &= 5a_2 \Rightarrow a_2 = 7 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

E, como já vimos,

$$a_3 = 0$$

Figura C.5: Exercício 4.3.



Exercício 4.3

$$F \cos \theta - \mu_c N = ma$$

$$F \sin \theta + N = mg$$

$$\Rightarrow F \cos \theta - \mu_c (mg - F \sin \theta) = ma \Rightarrow F = \frac{m(\mu_c g + a)}{\cos \theta + \mu_c \sin \theta}$$

A força \vec{F} será mínima quando $\cos \theta + \mu_c \sin \theta$ for máximo. Assim, chamando $\cos \theta + \mu_c \sin \theta$ de $A(\theta)$, temos

$$\frac{dA}{d\theta} = -\sin \theta + \mu_c \cos \theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \mu_c$$

É fácil ver que, realmente, o valor acima corresponde a um máximo para $A(\theta)$.

Exercício 4.7

Vamos fazer o isolamento dos corpos. Como de costume, devemos ter sempre em mente a terceira lei de Newton (veja figura).

Como o sistema deve se mover com m_1 em repouso relativamente a M , temos que todos os corpos do sistema devem possuir a mesma aceleração. Aplicando, então, a segunda lei de Newton a cada corpo, temos as relações

$$F - T - T \sin \theta = Ma$$

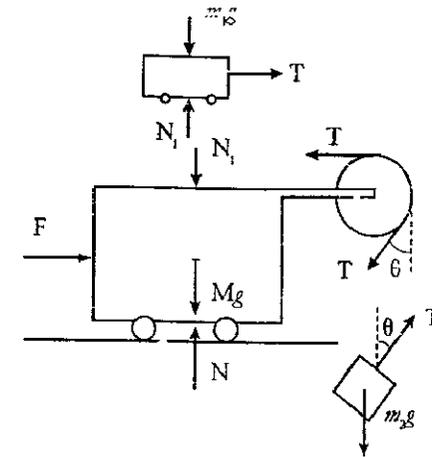
$$T = m_1 a$$

$$T \sin \theta = m_2 a$$

$$T \cos \theta = m_2 g$$

Substituindo os valores numéricos, vem

Figura C.6: Exercício 4.7.



$$F - T - T \sin \theta = 21a$$

$$T = 5a$$

$$T \sin \theta = 4a$$

$$T \cos \theta = 10$$

Resolvendo as equações, obtemos

$$\sin \theta = 0,8 \text{ e } \cos \theta = 0,6$$

$$T = 67 \text{ Newtons}$$

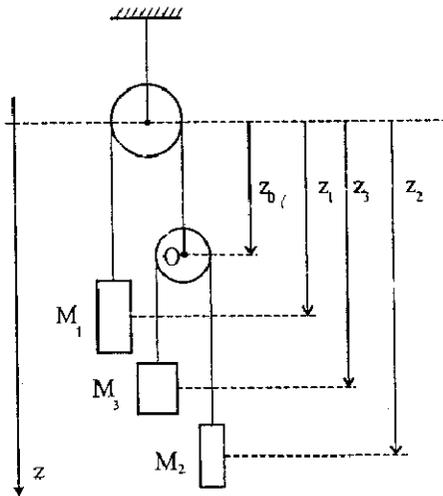
$$a = 13 \text{ m/s}^2$$

$$F = 400 \text{ Newtons}$$

Exercício 4.8

Neste exercício, não é algo muito simples impor condições às massas M_1 , M_2 e M_3 para saber quem está subindo e quem está descendo. Entretanto, este não é um ponto importante na resolução. Vamos orientar um eixo vertical e escrever todas as equações em relação à orientação deste eixo. Deixemos que os dados numéricos, quando substituídos, dêem-nos o sentido correto do movimento de cada massa (veja figura).

Figura C.7: Exercício 4.8.



Isolemos os corpos e apliquemos a segunda lei de Newton em cada um (veja as figuras correspondentes)

$$\begin{aligned} M_1 g - F &= M_1 a_1 \\ M_2 g - F' &= M_2 a_2 \\ M_3 g - F' &= M_3 a_3 \\ 2F' - F &= 0 \end{aligned}$$

A última equação se deve ao fato de a massa roldana ser desprezível. Temos acima 4 equações e 5 incógnitas (F , F' , a_1 , a_2 e a_3). A equação que está faltando para podermos resolver completamente o sistema é obtida da informação de os fios serem considerados inextensíveis. Assim,

$$\begin{aligned} z_0 + z_1 &= \text{const.} \\ (z_2 - z_0) + (z_3 - z_0) &= \text{const.} \end{aligned}$$

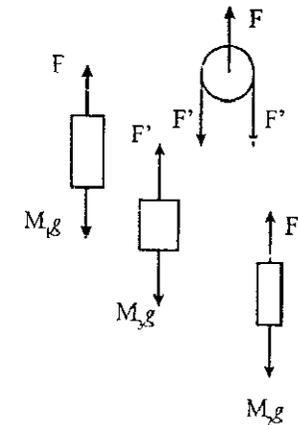
Combinando essas duas relações, vem

$$2z_1 + z_2 + z_3 = \text{const.}$$

Derivando-a duas vezes com respeito ao tempo, obtemos a quinta expressão que estava faltando,

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

Figura C.8: Exercício 4.8.



Resolvendo o sistema formado pelas cinco relações encontradas, achamos as acelerações

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{4M_2M_3 - M_1(M_2 + M_3)}{4M_2M_3 + M_1(M_2 + M_3)} g \\ a_2 &= \frac{4M_2M_3 + M_1(M_2 - 3M_3)}{4M_2M_3 + M_1(M_2 + M_3)} g \\ a_3 &= \frac{4M_2M_3 + M_1(M_3 - 3M_2)}{4M_2M_3 + M_1(M_2 + M_3)} g \end{aligned}$$

Exercício 5.4

A figura abaixo representa o corpo em equilíbrio, na situação em que está flutuando no líquido (l é a parte submersa do corpo). Consideremos que, a partir desta posição, ele seja afundado de uma distância x (inicialmente tomada em módulo). A força que atua sobre o corpo (para cima) é dada por

$$F = F_e - Mg = \mu bc(x + l)g - abc \rho g,$$

onde

$$\begin{aligned} F_e &= \text{empuxo} \\ M &= \text{massa.} \end{aligned}$$

Na situação mostrada na figura, como dissemos, o corpo está em equilíbrio. Com isto, podemos expressar l em termos dos dados iniciais

$$bcl \mu g = abc \rho g \Rightarrow l = \frac{\rho}{\mu} a$$

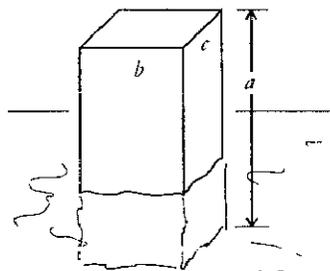
Substituindo este resultado na expressão anterior, obtemos

$$F = \mu bc g x$$

Esta força é restauradora (lembre-se de que x foi tomado em módulo) e proporcional ao deslocamento. O movimento será, portanto, harmônico simples. A frequência angular é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu bc g}{M}} = \sqrt{\frac{\mu g}{\rho a}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho a}{\mu g}}$$

Figura C.9: Exercício 5.4.



Exercício 5.5

Seja o primeiro caso. Desloquemos o corpo M de x em relação à sua posição de equilíbrio.

A força resultante que atua sobre M é dada por $-(k_1 x + k_2 x)$. De acordo com a segunda lei de Newton, temos

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -(k_1 + k_2) x$$

Portanto, a constante da mola equivalente é

$$k = k_1 + k_2$$

Vejamos agora o segundo caso. Deslocando o corpo M de x em relação a sua posição de equilíbrio, temos a situação mostrada na figura abaixo.

Figura C.10: Exercício 5.5.

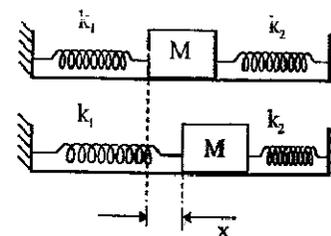
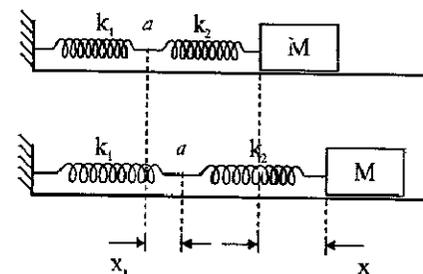


Figura C.11: Exercício 5.5.

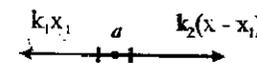


A força resultante que atua sobre M é $-k_2(x - x_1)$. Portanto, pela segunda lei de Newton,

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_2(x - x_1)$$

Tomemos um pequeno trecho entre as molas, contendo o ponto a . As forças que atuam neste trecho estão mostradas na figura a seguir.

Figura C.12: Exercício 5.5.



Como as massas das molas são desprezíveis, temos, pela segunda lei de Newton

$$k_1 x_1 - k_2(x - x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x$$

Substituindo este valor de x_1 na equação anterior, vem

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_2 \left(x - \frac{k_2}{k_1 + k_2} x \right) = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$$

Como vemos, neste caso de ligação de molas em série, a constante da mola equivalente é

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Exercício 5.7

a) Realmente, somando e subtraindo $i\omega_0 \dot{x}$ à equação, temos

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x \pm i\omega_0 \dot{x} &= \frac{F(t)}{m} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega_0 x) - i\omega_0(\dot{x} + i\omega_0 x) &= \frac{F(t)}{m} \Rightarrow \dot{z} - i\omega_0 z = \frac{F(t)}{m} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

b) Vamos substituir $z(t) = A(t)e^{i\omega_0 t}$ em (C.16) e, com isto, procurar determinar $A(t)$. Obtém-se

$$\dot{A} e^{i\omega_0 t} = \frac{F(t)}{m} \Rightarrow A(t) = \frac{1}{m} \int F(t) e^{-i\omega_0 t} dt + \text{const.}$$

Então,

$$z(t) = e^{i\omega_0 t} \left[\frac{1}{m} \int F(t) e^{-i\omega_0 t} dt + \text{const.} \right]$$

Chamando de z_0 o valor de z em $t = 0$, podemos escrever

$$z(t) = e^{i\omega_0 t} \left[\frac{1}{m} \int_0^t F(\tau) e^{-i\omega_0 \tau} d\tau + z_0 \right] \quad (\text{C.17})$$

c) Usemos a relação acima para $F(t) = F_0 \sin \omega_0 t$

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{i\omega_0 t} \left(\frac{F_0}{m} \int_0^t \sin \omega_0 \tau e^{-i\omega_0 \tau} d\tau + z_0 \right) \\ &= e^{i\omega_0 t} \left[\frac{F_0}{2im} \int_0^t (1 - e^{-2i\omega_0 \tau}) d\tau + z_0 \right] \\ &= e^{i\omega_0 t} \left[\frac{F_0}{2im} \left(t + \frac{e^{-2i\omega_0 \tau}}{2i\omega_0} \Big|_0^t \right) + z_0 \right] \\ &= \frac{F_0 t}{2im} e^{i\omega_0 t} - \frac{F_0}{2im\omega_0} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} + (\dot{x}_0 + i\omega_0 x_0) e^{i\omega_0 t} \\ &= -\frac{iF_0 t}{2m} e^{i\omega_0 t} + \frac{iF_0}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t + (\dot{x}_0 + i\omega_0 x_0) e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

Considerando que $x = \text{Im } z/\omega_0$, temos

$$x(t) = -\frac{F_0 t}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \sin \omega_0 t + \frac{x_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t \quad (\text{C.18})$$

Esta solução deve coincidir com (5.77). Vamos mostrar que realmente coincidem. Reescrevamos (5.77) usando x_0 e \dot{x}_0 em lugar de A e ϕ ,

$$\begin{aligned} x_0 &= A \sin \phi \\ \dot{x}_0 &= A \omega_0 \cos \phi - \frac{F_0}{2m\omega_0} \end{aligned}$$

Então,

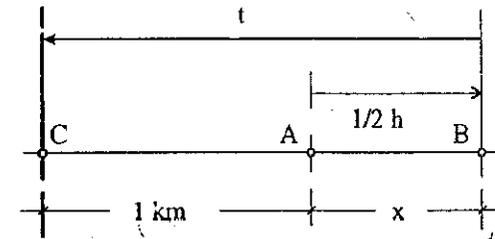
$$\begin{aligned} A \sin \phi &= x_0 \\ A \cos \phi &= \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na expressão (5.77), obteremos exatamente a relação (C.18).

A resolução dos casos propostos no item *d* segue procedimento idêntico.

Exercício 7.1

Figura C.13: Exercício 7.1.



Sob o ponto de vista de um observador na terra, temos o disposto na figura acima, onde A é o ponto onde o remador deixa cair o objeto, B é o ponto onde ele retorna para apanhar o objeto que havia caído e C é o ponto onde ele encontra o objeto. Com os dados do problema, podemos montar as seguintes relações

$$\tau = (v_{B/R} - v_D) \frac{1}{2} \quad (\text{C.19})$$

$$x + 1 = (v_{B/R} + v_R) t \quad (\text{C.20})$$

$$1 = v_R \left(t + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.21})$$

No sistema acima, formado pelas três equações, temos quatro incógnitas. É claro que não podemos resolvê-lo. Entretanto, o interessante neste sistema, conforme veremos, é que ele é indeterminado apenas para duas das variáveis.

Subtraindo as duas primeiras relações, encontramos

$$1 = v_{B/R} \left(t - \frac{1}{2} \right) + v_R \left(t + \frac{1}{2} \right)$$

Usando neste resultado (C.21), temos

$$v_{B/R} \left(t - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} h, \text{ pois } v_{B/R} \neq 0$$

Levando este resultado em (C.21) obtemos v_R

$$v_R = 1 \text{ km/h}$$

Como vemos, as quantidades x e $v_{B/R}$ são portanto indeterminadas. Isto é, existem infinitos valores de x e $v_{B/R}$ que tornam este mesmo problema possível.

Sob o ponto de vista do referencial do rio, temos que a água do rio está parada (quem se move é a terra). Assim, quando o objeto cai, ele fica parado (em relação ao rio). Após remar meia hora, o remador nota que está sem o objeto e volta. Como o objeto está parado, ele deve remar o mesmo tempo para voltar. Ao todo, portanto, ele remou uma hora. Quando ele encontra o objeto, ele nota que a ponte se deslocou 1 km. Assim, a velocidade com que a terra se move em relação ao rio é de 1 km/h, que é, obviamente, a velocidade com que o rio se move em relação à terra.

Como podemos notar, a resolução do problema no referencial do rio é muito mais simples.

Exercício 7.3

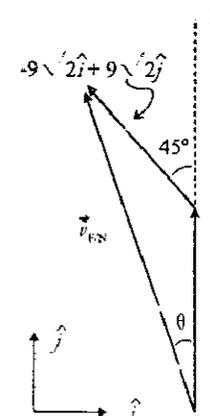
Se não houvesse vento, é fácil perceber que em relação ao navio a fumaça estaria indo em sentido contrário (para o norte) com velocidade de 25 km/h. Como há vento, é claro que em relação ao navio a velocidade da fumaça será a resultante entre a velocidade anterior e a do vento, como mostra a figura.

$$\vec{v}_{F/N} = -9\sqrt{2} \hat{i} + (25 + 9\sqrt{2}) \hat{j}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{9\sqrt{2}}{25 + 9\sqrt{2}} = 0,337 \Rightarrow \theta = 18^\circ 36'$$

No sentido noroeste.

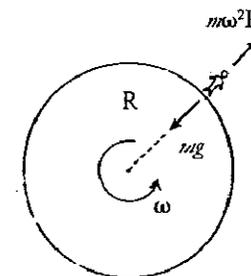
Figura C.14: Exercício 7.3.



Exercício 7.7

Como é bem conhecido, a Terra não é um referencial inercial. Particularmente, para uma pessoa no equador, haverá uma força radial, dirigida para fora, dada por $m\omega^2 R$, onde m é a massa da pessoa e ω é a velocidade angular de rotação da Terra (veja a figura)

Figura C.15: Exercício 7.7.



Ela não sentiria a ação do campo gravitacional se

$$m\bar{g} = m\omega^2 R \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{T^2} R \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

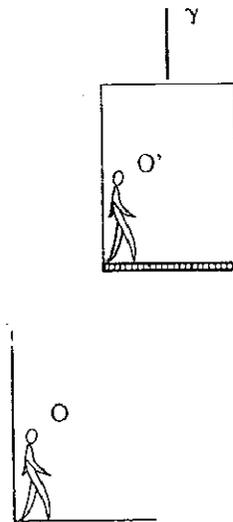
Usando que $R = 6.380 \text{ km}$ e $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, encontramos

$$T = 1 \text{ h } 25 \text{ min}$$

Exercício 7.8

a) Observe a figura abaixo, onde O é um observador inercial que vê o elevador se deslocando com aceleração $\vec{\gamma}$ e O' é um observador não inercial, situado no elevador.

Figura C.16: Exercício 7.8.



Obviamente, o problema pode ser resolvido tanto no referencial de O como de O' (ou noutro qualquer). Vamos optar por resolvê-lo no referencial não inercial O' , onde a trajetória do balde é simplesmente um círculo. As forças que atuam sobre a água, num ponto qualquer da trajetória, estão especificadas na figura abaixo, onde $m\bar{g}$ é a interação gravitacional da água com a Terra, f' é a interação resultante entre o balde e a água (força de contato) e $-m\vec{\gamma}$ é a força inercial (força fictícia), pois estamos num referencial não-inercial.

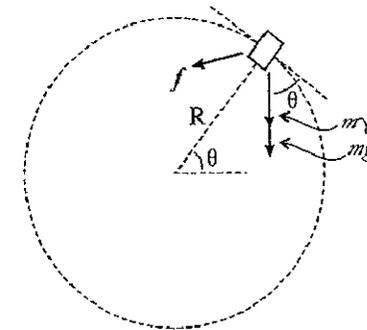
b) A resultante voltada para o centro é $f' + (mg + m\gamma)\text{sen } \theta$, onde f' é a componente de \vec{f} nesta direção. Pela adaptação da segunda lei de Newton para referenciais não-inerciais, temos, já que o movimento é circular

$$f' + m(g + \gamma)\text{sen } \theta = m\omega^2 R$$

Para que a água não derrame do balde, f' tem de ser diferente de zero sempre (o que significa que a água estará sempre em contato com o fundo do balde). O lado direito da relação acima é constante (dado do problema). No lado esquerdo, $m(g + \gamma)\text{sen } \theta$ aumenta de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$. Consequentemente, f' diminui neste intervalo. O ponto onde f' é mínimo é em $\theta = \pi/2$. Então, o caso limite corresponde a $f' = 0$ neste ponto. Assim,

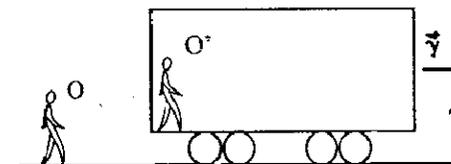
$$m(g + \gamma) = m\omega_{\text{mín}}^2 R \Rightarrow \omega_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{g + \gamma}{R}}$$

Figura C.17: Exercício 7.8.



c) Seja agora um trem movendo-se com aceleração $\vec{\gamma}$, como mostra a figura abaixo. Novamente aqui, vamos resolver o problema sob o ponto de vista do observador não-inercial O' . O motivo é o mesmo do caso anterior, isto é, a trajetória do corpo é mais simples.

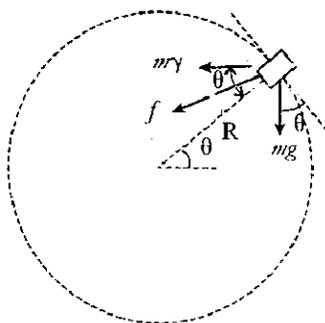
Figura C.18: Exercício 7.8.



As forças que atuam sobre a água, neste referencial, estão mostradas na figura a seguir. Aplicando a "segunda lei de Newton" na direção radial, temos

$$mg \sin \theta + m\gamma \cos \theta + f' = m\omega^2 R$$

Figura C.19: Exercício 7.8.



Considerando o mesmo raciocínio anterior, vejamos para que valor de θ temos $mg \sin \theta + m\gamma \cos \theta$ máximo. Seja então a função

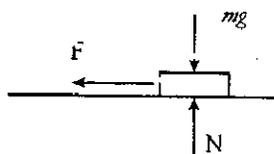
$$G(\theta) = g \sin \theta + \gamma \cos \theta \Rightarrow \frac{dG}{d\theta} = g \cos \theta - \gamma \sin \theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{g}{\gamma}$$

É fácil ver que este valor corresponde realmente a um máximo para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Substituindo θ na expressão inicial, e fazendo $f' = 0$ neste ponto (caso limite), obtemos

$$\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{g^2 + \gamma^2}{R}}$$

Exercício 7.10

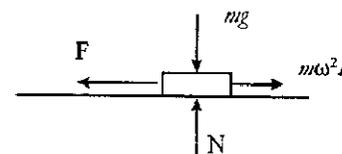
Figura C.20: Exercício 7.10.



a) A figura acima contém as forças que atuam sobre o corpo segundo um observador inercial, onde $m\vec{g}$ é a interação gravitacional com a Terra (a reação está no centro da Terra). A força \vec{N} é a interação de contato com a mesa (a reação está sobre a mesa). Finalmente, \vec{F} é a força que o fio exerce sobre o corpo (a reação está no fio).

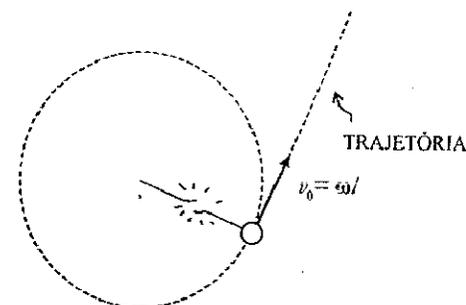
b) Este observador não é inercial. As forças que atuam sobre o disco, de acordo com ele, estão mostradas na figura abaixo. As forças \vec{F} , \vec{N} e $m\vec{g}$ são as mesmas discutidas anteriormente. A força $m\omega^2 l \hat{r}$ só existe para o observador girante. Ela é uma força inercial. Não há reação para ela, pois não obedece à terceira lei de Newton.

Figura C.21: Exercício 7.10.



c) A trajetória seguida pelo corpo para o observador inercial é uma linha reta, descrita com velocidade constante. Para ele, a resultante das forças que atuam sobre o corpo é nula (veja figura)

Figura C.22: Exercício 7.10.

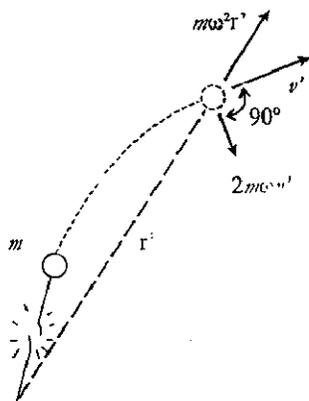


Para o observador não inercial, a trajetória não será com velocidade constante, pois existe a força centrífuga e a força de Coriolis neste referencial

Exercício 8.7

Como o atrito é desprezível, a energia mecânica se conserva. Considerando o ponto inicial, onde o corpo é solto, e o ponto O , temos

Figura C.23: Exercício 7.10.



$$\frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + l^2} - l_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

A resolução desta equação para v fornece

$$v = \left\{ \frac{k}{m} \left[x^2 - 2l_0(\sqrt{x^2 + l^2} + l) \right] \right\}^{1/2}$$

Exercício 8.24

A força resultante que atua sobre a partícula antes de o fio ser esticado é nula. Após o fio ser esticado, a força resultante é a força que o fio exerce sobre partícula. Em relação ao ponto onde está o prego, esta força possui torque zero. Assim, o torque da força resultante é sempre zero. Em consequência, temos que o momento angular se conserva (em relação ao ponto onde o torque é nulo). Portanto,

$$mVb\dot{\theta} = mvL\dot{\theta} \Rightarrow Vb = \left(\frac{v}{L}\right)L^2 = \omega L^2 \Rightarrow \omega = \frac{Vb}{L^2}$$

O momento linear não se conserva pois existe uma força resultante atuando sobre a partícula após o fio ser esticado. Vejamos quanto à energia mecânica. Como todo o movimento se passa a um mesmo nível de energia potencial, consideremos apenas a energia cinética

$$\text{Antes: } E_A = \frac{1}{2}mV^2$$

$$\text{Depois: } E_D = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{V^2b^2}{L^2}$$

Só haveria conservação se $b = L$. Acontece que parte da energia é usada para produzir uma pequena deformação do fio, de caráter não elástico.

Exercício 8.25

É ilustrativo olhar a resolução do exercício anterior. Vimos que a força resultante antes de o fio ser esticado era zero e após esticado era central. Com isto, o torque em relação ao ponto central era sempre zero. No presente problema, o mesmo não ocorre. A força peso produz um torque, em relação ao ponto onde o outro extremo do fio está preso, que não é zero (antes e depois de o fio ser esticado). Assim, não podemos dizer que o movimento angular se conserva. É óbvio que o momento linear também não. Pelo que vimos na resolução do exercício anterior, nem a energia mecânica.

Neste exercício, temos de usar um outro raciocínio que, às vezes, é erroneamente intitulado de princípio de conservação. Seja o instante em que o fio fica todo esticado. Imediatamente antes deste instante, só atua a força peso e imediatamente depois, o peso e a força que o fio exerce sobre o corpo. Entretanto, esta última, por ser central, possui torque zero em relação ao centro do movimento. Assim, o torque antes e depois de o fio estar esticado é sempre o torque da força peso. Em consequência disto, o momento angular não possui variação brusca no instante em que o fio estica. O mesmo não ocorre com o momento linear e com a energia mecânica. Assim, podemos dizer que imediatamente antes e imediatamente depois de o fio ser esticado o momento angular é aproximadamente o mesmo (pois ele varia continuamente).

Como vemos, não estamos de fato usando a conservação do momento angular, mas sim a sua continuidade. A figura abaixo representa a situação imediatamente antes de o fio esticar.

O momento angular neste ponto é dado por (só o módulo)

$$l = mvb$$

Até este ponto, há conservação da energia mecânica

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\sqrt{L^2 - b^2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\sqrt{L^2 - b^2}}$$

Combinando as duas relações acima, encontramos

$$l = mb\sqrt{2g\sqrt{L^2 - b^2}}$$

Imediatamente após o fio esticar, a situação é descrita pela figura abaixo.

O momento angular é

Figura C.24: Exercício 8.25.

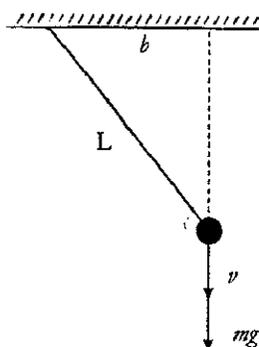
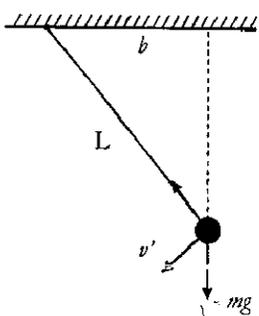


Figura C.25: Exercício 8.25.



$$l' = mv'L$$

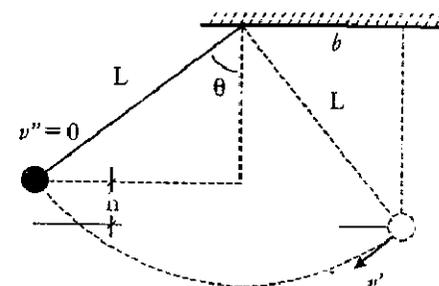
Pela continuidade do momento angular, podemos calcular v' (pois $l \simeq l'$)

$$mv'L = mb\sqrt{2g\sqrt{L^2 - b^2}} \Rightarrow v' = \frac{b}{L}\sqrt{2g\sqrt{L^2 - b^2}}$$

Só há perda de energia no instante em que o fio estica. A partir daí, ela se conserva novamente. Então, considerando este ponto como nível de energia potencial nula, temos (veja figura)

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{1}{2g} \frac{b^2}{L^2} 2g\sqrt{L^2 - b^2} = \frac{b^2}{L^2} \sqrt{L^2 - b^2}$$

Figura C.26: Exercício 8.25.



O ângulo θ é então dado por

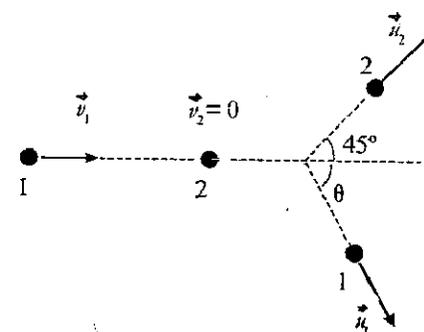
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{L^2 - b^2} - h}{L} = \frac{(L^2 - b^2)^{3/2}}{L^3}$$

O corpo só irá até a parte superior se $L = b$ (neste caso, não haveria perda de energia).

Exercício 9.1

A figura abaixo mostra a situação antes e após a colisão.

Figura C.27: Exercício 9.1.



A resultante das forças externas que atuam sobre o sistema é nula. Então, o momento linear total é conservado. Como, por hipótese, a colisão é elástica, há também conservação da energia mecânica (no caso, só cinética).

Pela conservação do momento linear, temos

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \Rightarrow 6\hat{i} = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$$

Esta equação vetorial fornece duas equações (veja a figura anterior)

$$6 = 3u_1 \cos \theta + 2\sqrt{2}u_2 \quad (\text{C.22})$$

$$0 = -3u_1 \sin \theta + 2\sqrt{2}u_2 \quad (\text{C.23})$$

Peia conservação da energia mecânica, obtemos mais uma equação

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \\ 12 &= 3u_1^2 + 4u_2^2 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (C.22) - (C.24), obtêm-se

$$\vec{u}_1 = \frac{2}{7}(3\hat{i} - 4\hat{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{6}{7}(\hat{i} + \hat{j}) \text{ m/s}$$

Para fazer a análise do problema em relação ao centro-de-massa, vamos determinar a velocidade do CM

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{6}{7}\hat{i} \text{ m/s}$$

As velocidades das partículas em relação ao CM são, portanto, dadas por

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \frac{8}{7}\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -\frac{6}{7}\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v}_{CM} = -\frac{8}{7}\hat{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{v}_{CM} = \frac{6}{7}\hat{j} \text{ m/s}$$

Se em lugar de 45° , tivéssemos um ângulo de 30° , a solução seria

$$\vec{u}_1 = \frac{2}{7}(\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j})$$

$$\vec{u}_2 = \frac{3}{7}(3\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$$

No referencial do CM, as velocidades seriam

$$\vec{v}_1' = \frac{8}{7}\hat{i}$$

$$\vec{v}_2' = -\frac{6}{7}\hat{i}$$

$$\vec{u}_1' = \frac{4}{7}(-\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$$

$$\vec{u}_2' = \frac{3}{7}(\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j})$$

As figuras abaixo representam os dois casos considerados, antes e depois da colisão.

Figura C.28: Exercício 9.1.

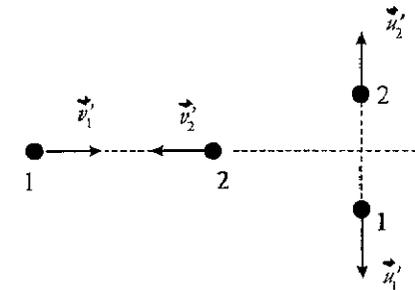
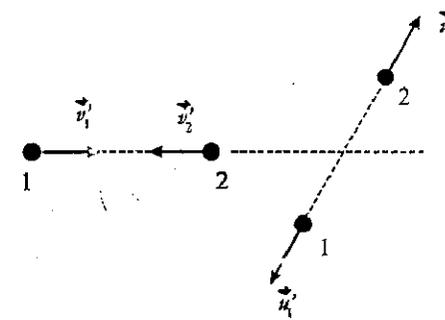


Figura C.29: Exercício 9.1.



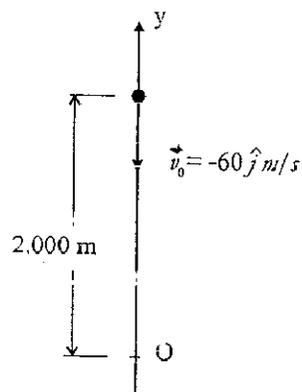
Exercício 9.5

Como sabemos, só a resultante das forças externas alteram o movimento do centro-de-massa. A explosão decorre de forças internas e, conseqüentemente, o centro-de-massa continua a cair como se nada tivesse ocorrido. Usando os dados da figura abaixo, temos, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= -10 \Rightarrow v = -10t - 60 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= -10t - 60 \Rightarrow y = -5t^2 - 60t + 2000 \end{aligned}$$

Então, para $t = 10$ s, $y = 900$ m

Figura C.30: Exercício 9.5.



Caso você ainda tenha dúvidas sobre este resultado, é possível confirmá-lo calculando separadamente a posição de cada pedaço 10 s após a explosão. Depois, determina-se o CM entre eles. Vamos fazer isto. Podemos dizer que o momento linear do sistema imediatamente antes da explosão é aproximadamente igual ao momento linear imediatamente depois (veja explicação inicial na resolução do exercício 7.25).

$$m \cdot 60 = \frac{m}{2} \cdot 80 + \frac{m}{2} v_2 \Rightarrow v_2 = 40 \text{ m/s}$$

O sinal positivo de v_2 indica que o segundo pedaço possui o mesmo sentido do pedaço anterior (que foi convencionado positivo). Assim, 10 segundos após, eles estarão nas seguintes posições

$$y_1 = 2000 - 80 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^2 = 700 \text{ m}$$

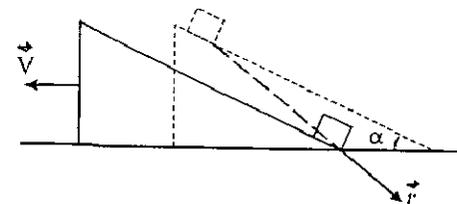
$$y_2 = 2000 - 40 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^2 = 1100 \text{ m}$$

Como as massas são iguais, o CM estará exatamente no ponto médio entre as duas posições acima, ou seja, a 900 m de altura.

Exercício 9.6

Conforme o corpo de massa m desce, a cunha se desloca para a esquerda. É importante atentar para a trajetória seguida pelo corpo m . Ela está representada pela linha tracejada da figura a seguir

Figura C.31: Exercício 9.6.



Horizontalmente, a força resultante externa é nula. Logo, a componente horizontal do momento linear total se conserva

$$0 = m v_x - MV \quad (\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) \quad (\text{C.25})$$

Pela conservação da energia mecânica, temos

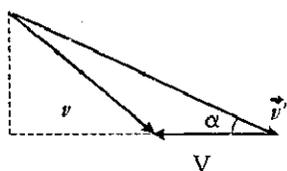
$$mgh = \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2) \quad (\text{C.26})$$

Temos acima duas equações e três incógnitas (v_x , v_y e V) e de onde não é possível extrair o valor de V . Precisamos de mais uma equação. Esta é obtida por uma composição simples de movimento relativo (veja a figura abaixo). \vec{v}' é a velocidade do bloco em relação à cunha.

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x + V} \quad (\text{C.27})$$

Como α é um dado do problema, temos agora três equações e três incógnitas. É apenas uma questão de trabalho algébrico resolver as equações (C.25) - (C.27) e mostrar que

Figura C.32: Exercício 9.6



$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{M + \frac{M^2}{M} + \frac{(m+M)^2}{m} \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Exercício 9.7

a) Pelo que já foi explicado várias vezes, temos que as partículas irão colidir no centro-de-massa.

b) Sendo \vec{r}_1' e \vec{r}_2' as posições das partículas 1 e 2, respectivamente, em relação ao CM, num instante qualquer, e $\vec{r} = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'$ (posição da partícula 2 em relação à partícula 1), temos

$$-G \frac{m_1 m_2}{r_0} = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2'^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{C.28})$$

c) Pela definição de centro-de-massa, vem

$$m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0$$

onde

$$\vec{r} = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'$$

Combinando estas duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados na expressão (C.28), vem

$$-G \frac{m_1 m_2}{r_0} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{C.29})$$

Como podemos notar, na relação (C.29) aparece apenas a variável r (separação entre as duas partículas em cada instante). O que fizemos se chama redução do problema de dois corpos ao problema de um corpo, onde, como sabemos, a quantidade $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema. A expressão (C.29) permite-nos escrever,

$$\dot{r}^2 = 2G(m_1 + m_2) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \Rightarrow dt = -\frac{dr}{\sqrt{2G(m_1 + m_2) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}}$$

Chamando de T o tempo que as partículas levam para se chocar, temos

$$\int_0^T dt = \frac{-1}{\sqrt{2G(m_1 + m_2)}} \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} \quad (\text{C.30})$$

Consideremos separadamente a integral

$$I = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = 2\sqrt{r_0} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{r_0 - u^2}}$$

onde foi feita, na última passagem, a substituição $r = u^2$. Façamos, agora,

$$u = \sqrt{r_0} \operatorname{sen} \theta \Rightarrow du = \sqrt{r_0} \cos \theta d\theta$$

Então,

$$I = 2r_0^{3/2} \int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = r_0^{3/2} \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = r_0^{3/2} \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) + \text{const.}$$

Voltando à variável inicial r , temos

$$I = r_0^{3/2} \left[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{r}{r_0}} - \sqrt{\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)} \right] + \text{const.}$$

Finalmente, usando este resultado em (C.30), obtemos

$$\begin{aligned} T &= \frac{-r_0^{3/2}}{\sqrt{2G(m_1 + m_2)}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{r}{r_0}} - \sqrt{\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)} \right]_0^{r_0} \\ &= \frac{\pi r_0^{3/2}}{2\sqrt{2G(m_1 + m_2)}} \end{aligned}$$

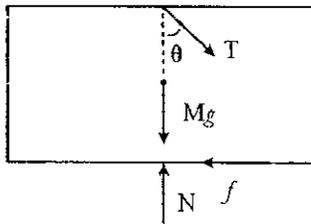
Exercício 9.12

As forças que atuam sobre a caixa quando o pêndulo faz um ângulo θ com a vertical estão mostradas na figura abaixo. Para que a caixa permaneça em equilíbrio, deveremos ter

$$T \cos \theta + Mg = N \quad (\text{C.31})$$

$$T \sin \theta = f \quad (\text{C.32})$$

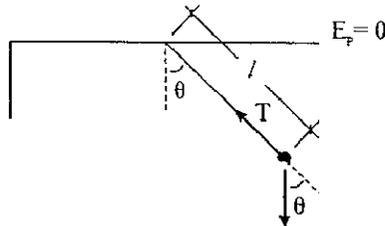
Figura C.33: Exercício 9.12.



Por outro lado, isolando-se o pêndulo, temos (veja a figura abaixo)

$$T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{l} \quad (\text{C.33})$$

Figura C.34: Exercício 9.12.



Usando a conservação da energia mecânica, vem

$$0 = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gl \cos \theta \quad (\text{C.34})$$

Das expressões (C.33) e (C.34), tiramos

$$T = 3mg \cos \theta \quad (\text{C.35})$$

Substituindo este resultado nas Eqs. (C.31) e (C.32), obtemos N e f em função de θ (e dos dados do problema).

$$N = 3mg \cos^2 \theta + Mg \quad (\text{C.36})$$

$$f = 3mg \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.37})$$

Poderíamos, inadvertidamente, usar o seguinte raciocínio: Achemos o ângulo θ onde a força de atrito é máxima. Fazemos aí $f = \mu N$ e calculamos μ , acreditando que se a caixa não deslizar neste ponto não o fará em nenhuma outra situação. Embora este raciocínio pareça ter uma certa lógica, ele está errado! Mas continuemos com ele um pouco mais. O valor máximo de f é para $\theta = 45^\circ$.

$$f_{\text{máx}} = \frac{3}{2}mg$$

$$N = \frac{3}{2}mg + Mg$$

Assim, μ seria dado por

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}}$$

Vamos mostrar, para um certo caso particular, que o resultado anterior é inconsistente com a situação de a caixa ficar em repouso para todos os pontos do movimento pendular. Seja, por exemplo, $m = M = 1,0 \text{ kg}$. Assim, $\mu = 0,6$. Consideremos o pêndulo na posição $\theta = 60^\circ$. Temos, então,

$$N = 17,5 \text{ Newtons}$$

$$f = 13,0 \text{ Newtons}$$

$$\mu N = 10,5 \text{ Newtons (!?)}$$

Ou seja, para $\theta = 60^\circ$ a caixa não poderia estar em repouso pois f é maior que μN neste ponto!

Como pudemos notar, embora para $\theta = 60^\circ$ f é menor do que o valor em $\theta = 45^\circ$, ele não é suficiente para manter a caixa em repouso quando o pêndulo estiver naquela posição. O erro cometido no raciocínio apresentado é que não levamos em consideração o fato de N depender de θ . Consideramos que o caso limite da força de atrito estático ocorresse em $\theta = 45^\circ$. Mas, como vimos, isto não é verdade. Este caso limite deve ocorrer num outro ponto, pois o coeficiente de atrito deve ser maior do que o valor encontrado para $\theta = 45^\circ$.

Como disse, o raciocínio que adotamos valeria se N fosse constante. Neste caso, procuraríamos o ponto onde f fosse máximo e, aí, seria o ponto mais desfavorável. Agora, que N também depende de θ , temos de levar em conta tanto f como N . Assim, fazemos de uma maneira geral

$$f(\theta) = \mu N(\theta)$$

e procuremos para que θ esta relação fornece a situação mais desfavorável para μ . isto é, para que θ teremos um μ máximo. É precisamente este o μ que estamos procurando.

Considerando (C.36) e (C.37), temos

$$\mu = \frac{3mg \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{3mg \cos^2 \theta + Mg} \quad (\text{C.38})$$

Então,

$$\frac{d\mu}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{M}{2M + 3m} \quad (\text{C.39})$$

É óbvio que este resultado deve corresponder a um valor de μ máximo, pois o valor mínimo é para $\theta = 0$. Substituindo (C.39) em (C.38), encontramos

$$\mu = \frac{3m}{2\sqrt{M(M+3m)}}$$

Podemos ver que para este valor de μ não haverá a inconsistência descrita inicialmente, quando tomamos $m = M = 1$.

Exercício 9.13

Neste exercício, a energia mecânica não se conserva, pois há um choque inelástico em cada instante ente a parte que está subindo e a que se encontra em repouso sobre a mesa.

Vamos, então, partir de (veja a figura)

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\text{C.40})$$

Mas, na posição indicada na figura, temos

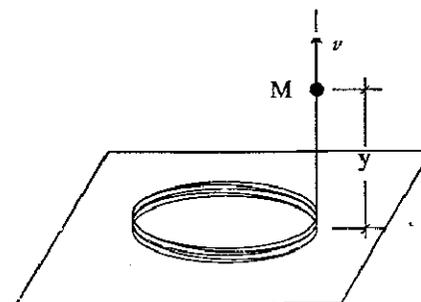
$$\vec{F}_{ext} = -(M + my)g \hat{j} \quad (\text{C.41})$$

$$\vec{P} = (M + my) \vec{v} \quad (\text{C.42})$$

Substituindo (C.41) e (C.42) em (C.40), obtemos

$$-(M + my)g = mv^2 + (M + my) \frac{dv}{dt}$$

Figura C.35: Exercício 9.13.



A fim de que tenhamos uma expressão envolvendo apenas as variáveis v e y , fazemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$$

Substituindo este resultado na relação anterior, encontramos

$$-(M + my)g = mv^2 + (M + my)v \frac{dv}{dy} \quad (\text{C.43})$$

Como podemos notar, não é possível reescrever a relação acima onde um dos lados da igualdade seja um elemento diferencial apenas em y e o outro apenas em v . Vamos adotar um outro procedimento. Multipliquemos ambos os lados de (C.43) por $(M + my)$. A expressão resultante pode ser reescrita como

$$-(M + my)^2 g = \frac{1}{2} \frac{d}{dy} [(M + my)^2 v^2]$$

De onde diretamente obtemos

$$-\frac{g}{3m} (M + my)^3 = \frac{1}{2} (M + my)^2 v^2 + const.$$

A constante que aparece na relação acima pode ser calculada diretamente através das condições iniciais, onde $y = 0$ e $v = V_0$. Assim, obtém-se que o seguinte valor para a constante

$$const. = -\frac{gM^3}{3m} - \frac{M^2 V_0^2}{2}$$

Substituindo este resultado na expressão anterior, obtemos

$$(M + my)^2 v^2 = -\frac{2g}{3m} (M + my)^3 + M^2 V_0^2 + \frac{2gM^3}{3m}$$

Finalmente, para $y = h$, $v = 0$. Então,

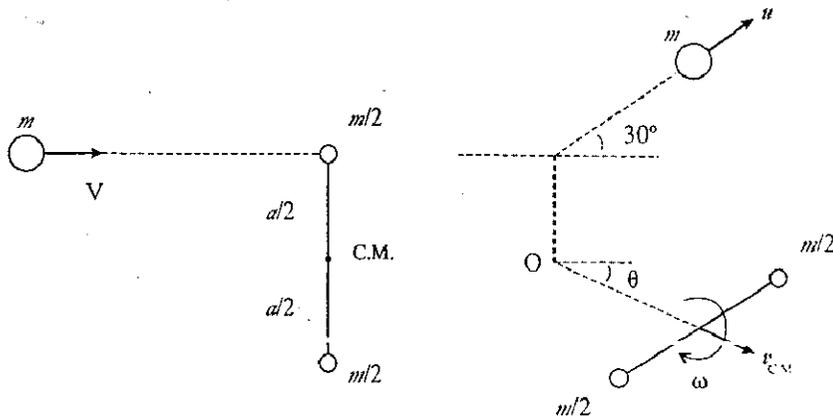
$$\frac{2g}{3m}(M + mh)^3 = M^2 V_0^2 + \frac{2gM^3}{3m} \Rightarrow h = \frac{M}{m} \left[\left(1 + \frac{3mV_0^2}{2Mg} \right)^{1/3} - 1 \right]$$

É fácil concluir que a velocidade da massa M quando ela volta ao solo é $\sqrt{2gh}$, pois a corrente não exerce nenhuma força sobre ela. Ambas caem em queda livre.

Exercício 9.14

Os momentos linear e angular e a energia mecânica são conservados (veja figura)

Figura C.36: Exercício 9.14.



Pela conservação do momento linear temos

$$mV = mu \cos 30^\circ + \left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2} \right) v_{CM} \cos \theta \Rightarrow V = \frac{u\sqrt{3}}{2} + v_{CM} \cos \theta \quad (C.44)$$

$$0 = mu \sin 30^\circ - \left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2} \right) v_{CM} \sin \theta \Rightarrow \frac{u}{2} = v_{CM} \sin \theta \quad (C.45)$$

Como o momento angular se conserva para todos os pontos, ficamos livres para escolher um ponto conveniente. Tomemos o ponto O .

$$mV \frac{a}{2} = \frac{m}{2} \frac{a}{2} \omega \frac{a}{2} \cdot 2 + mu \cos 30^\circ \frac{a}{2} \Rightarrow V = \frac{a\omega}{2} + \frac{u\sqrt{3}}{2} \quad (C.46)$$

A conservação da energia mecânica fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m V^2 &= \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2} \right) v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{m}{2} \left(\frac{a\omega}{2} \right)^2 \cdot 2 \\ \Rightarrow V^2 &= u^2 + v_{CM}^2 + \frac{a^2 \omega^2}{4} \end{aligned} \quad (C.47)$$

A solução do sistema formado pelas quatro equações (C.44) - (C.47) é uma mera questão de trabalho algébrico. O interessante é que há dois conjuntos de solução, sendo ambos possíveis:

$$\omega = 1,2 \frac{V}{a}; \quad u = 0,45V; \quad v_{CM} = 0,65V \quad \text{e} \quad \theta = 20^\circ 20' \quad (C.48)$$

$$\omega = 0,59 \frac{V}{a}; \quad u = 0,81V; \quad v_{CM} = 0,50V \quad \text{e} \quad \theta = 53^\circ 50' \quad (C.49)$$

Exercício 10.1

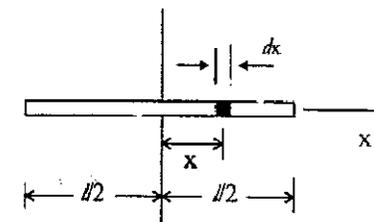
Seja o pequeno elemento de massa dm , subtendido pelo trecho dx da haste, como mostra a figura. O momento de inércia deste elemento em relação ao eixo considerado é dado por

$$dI = x^2 dm = x^2 \frac{m}{l} dx$$

O momento de inércia será então a soma de todas essas quantidades desde $x = -l/2$ até $x = l/2$.

$$I = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}$$

Figura C.37: Exercício 10.1.



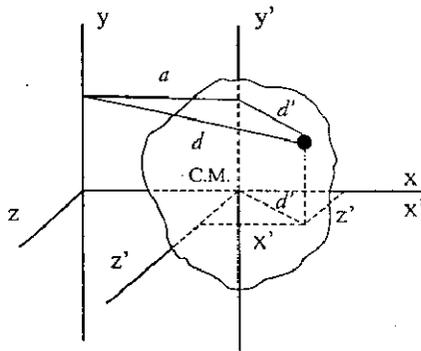
No caso de um eixo perpendicular à haste, mas passando por sua extremidade, a obtenção do momento de inércia é só uma questão de mudança dos limites de integração, isto é,

$$I' = \frac{m}{l} \int_0^l = \frac{ml^2}{3}$$

Exercício 10.2

Seja o momento de inércia em relação ao eixo y , como mostra a figura abaixo. O eixo y' , paralelo a y , passa pelo centro-de-massa. Um elemento de massa dm está a uma distância d de y e a uma distância d' de y' , sendo a a distância entre os dois eixos.

Figura C.38: Exercício 10.2.



$$\begin{aligned} I &= \int d^2 dm = \int [(a+x')^2 + z'^2] dm \\ &= a^2 \int dm + 2a \int x' dm + \int (x'^2 + z'^2) dm \\ &= Ma^2 + \int d'^2 dm = Ma^2 + I_{CM} \end{aligned}$$

No exercício anterior, $a = l/2$ e $I_{CM} = I$. Podemos ver que realmente a relação acima é verificada, pois,

$$I' = I + \frac{ml^2}{4}$$

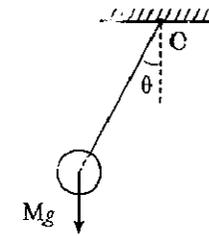
Exercício 10.4

Em relação ao ponto O , temos (veja figura)

$$-Mgl \sin \theta = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

O sinal menos da expressão acima é devido ao fato de o torque ter ação restauradora.

Figura C.39: Exercício 10.4.



Usando que

$$I = I_{CM} + Ml^2 = \frac{2}{5}MR^2 + Ml^2$$

e considerando pequenas oscilações, obtemos

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{gl}{\frac{2}{5}R^2 + l^2} \theta = 0$$

Portanto,

$$\omega^2 = \frac{gl}{\frac{2}{5}R^2 + l^2} \Rightarrow T = 2\pi \left(\frac{\frac{2}{5}R^2 + l^2}{gl} \right)^{1/2} = 2\pi \left[\frac{l}{g} \left(1 + 0,4 \frac{R^2}{l^2} \right) \right]^{1/2}$$

Como vemos, quanto maior for l em relação a R mais o resultado se aproxima do caso particular do pêndulo simples.

Exercício 10.10

a) É fácil verificar que não há conservação dos momentos linear e angular, bem como da energia mecânica. Entretanto, em relação ao ponto A , o momento angular imediatamente antes da colisão é igual ao momento angular imediatamente depois. Isto se deve porque a força extra que o pino exerce na barra, no instante da colisão, não contribui para o torque em relação ao ponto A .

Temos, então,

$$mva = m\omega a^2 + \frac{Ml^2}{3}\omega \Rightarrow \omega = \frac{3mva}{3ma^2 + Ml^2}$$

b) Já o momento linear imediatamente antes da colisão não é necessariamente igual ao momento linear imediatamente depois. Isto acontece por causa da força acima mencionada, a não ser que esta força seja nula. Assim, calculando a tal que os momentos lineares imediatamente antes e depois sejam iguais, teremos determinado a condição para não haver força extra no pino.

$$mv = m\omega a + M\omega \frac{l}{2}$$

Substituindo o valor de ω , obtido no item anterior, obtemos

$$a = \frac{2}{3}l$$

c) A energia transformada em calor é

$$Q = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2} \frac{Ml^2}{3} \omega^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \right) = \frac{mMl^2 v^2}{6ma^2 + 2Ml^2} \quad (\text{C.50})$$

Exercício 10.11

Em relação ao ponto O , o eixo perpendicular ao plano da figura (passando por O) é principal. Assim

$$\tau_o = I_o \alpha = \frac{ml^2}{3} \alpha$$

onde, na última passagem, foi usado o resultado do exercício X.1. Por outro lado,

$$\tau_o = mg \frac{l}{2} \cos \phi$$

Combinando estas duas equações, vem

$$\alpha = \frac{3g \cos \phi}{2l}$$

Para um ponto na extremidade da barra, temos

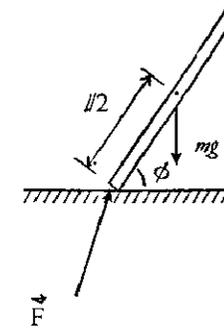
$$a = l\alpha = \frac{3}{2}g \cos \phi$$

Considerando que $v = ds/dt$ e $a = dv/dt$, temos $v dv = a ds$. Substituindo o valor da aceleração acima obtido, vem

$$v dv = -\frac{3}{2}gl \cos \phi d\phi$$

O sinal menos é porque dv e $d\phi$ possuem sentidos contrários. Integrando a expressão acima, temos

Figura C.40: Exercício 10.11.



$$\int_0^V v dv = -\frac{3}{2}gl \int_{\pi/2}^0 \cos \phi d\phi \Rightarrow \frac{V^2}{2} = \frac{3}{2}gl \Rightarrow V = \sqrt{3gl}$$

Vejamus uma outra solução, partindo da conservação da energia mecânica

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_{CM}^2 \Rightarrow lg = v_{CM}^2 + \frac{l^2}{12}\omega_{CM}^2$$

Facilmente vemos que a velocidade angular em torno do centro-de-massa é a mesma em torno do ponto fixo. Logo,

$$v_{CM} = \omega \frac{l}{2}$$

Combinando as duas últimas relações, obtemos

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Portanto,

$$V = \omega l = \sqrt{3gl}$$

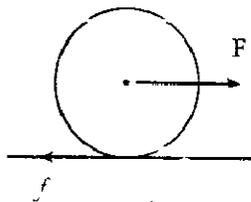
Exercício 10.12

No primeiro caso, temos (veja a figura)

$$F - f = Ma \quad (\text{C.51})$$

$$\tau_{CM} = I_{CM}\alpha \Rightarrow fR = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R} \Rightarrow f = \frac{1}{2}Ma \quad (\text{C.52})$$

Figura C.41: Exercício 10.12.

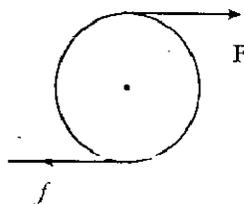


Resolvendo o sistema formado pelas equações (C.51) e (C.52), encontramos

$$F = \frac{3}{2}Ma \quad (\text{C.53})$$

Passemos agora para o segundo caso, que está especificado na figura abaixo. Colocamos a força de atrito para trás por mera intuição (por sinal, errada). Deixemos que os cálculos mostrem o sentido correto.

Figura C.42: Exercício 10.12.



As equações são

$$F - f = Ma \quad (\text{C.54})$$

$$\tau_{CM} = I_{CM}\alpha \Rightarrow fR + FR = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R} \Rightarrow f + F = \frac{1}{2}Ma \quad (\text{C.55})$$

A combinação das relações (C.54) e (C.55) fornece

$$F = \frac{3}{4}Ma$$

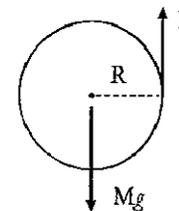
$$f = -\frac{1}{4}Ma$$

Como vemos, a força de atrito possui sentido contrário ao indicado na figura.

Exercício 10.13

A figura abaixo mostra as forças que atuam sobre o disco.

Figura C.43: Exercício 10.13.



Como já é bem conhecido, a utilização da segunda lei de Newton neste corpo rígido, leva às seguintes equações

$$Mg - F = Ma \quad (\text{C.56})$$

$$FR = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R} \Rightarrow F = \frac{1}{2}Ma \quad (\text{C.57})$$

Combinando (C.56) e (C.57), obtém-se

$$a = \frac{2}{3}g$$

Uma outra maneira de resolver é por conservação de energia (a força \vec{F} não realiza trabalho). A figura abaixo corresponde a uma situação onde o corpo desceu de uma distância x . Temos, então, que a expressão da conservação de energia mecânica para este ponto é dada por

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgx = \text{const.}$$

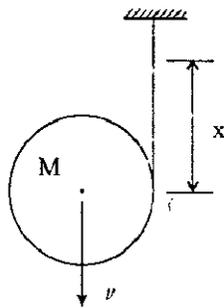
Derivando esta equação com respeito ao tempo, vem

$$Mva + I\omega\alpha - Mgv = 0 \Rightarrow Mva + \frac{MR^2}{2} \frac{v}{R} \frac{a}{R} - Mgv = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

Exercício 10.18

Consideremos um trecho da corda de comprimento s , desde a origem até um ponto genérico P , como mostra a figura abaixo. \vec{T} e \vec{H} são as forças de tensão nos pontos P e O , respectivamente. Como este trecho da corda está em equilíbrio, temos

Figura C.44: Exercício 10.13.



$$T \cos \phi = H \quad (\text{C.58})$$

$$T \sin \phi = \rho g s \quad (\text{C.59})$$

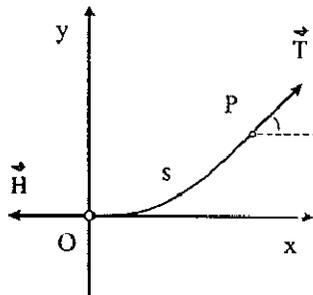
Combinando (C.58) e (C.59), vem

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\rho g s}{H} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\rho g s}{H} \quad (\text{C.60})$$

A equação acima possui três variáveis, x , y e s . A fim de termos uma equação só com duas variáveis (x e y), derivemos ambos os lados de (C.60) com respeito a x

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\rho g}{H} \frac{ds}{dx} = \frac{\rho g}{H} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{\rho g}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{C.61})$$

Figura C.45: Exercício 10.18.



Agora que temos uma equação diferencial envolvendo as variáveis x e y , queremos saber qual deve ser a função $y(x)$ que satisfaz esta equação. Pela observação de (C.61), vemos que isto não é algo muito simples, pelo menos tão diretamente. Fazemos, então, a seguinte substituição em (C.61)

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Assim,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho g}{H} \sqrt{1+p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\rho g}{H} dx \quad (\text{C.62})$$

Como vemos, o problema ficou reduzido ao cálculo de uma integral (temos de somar todos os pedaços infinitesimais). Entretanto, a resolução da integral também não é algo tão direto.

Consideremos a seguinte mudança de variável (que tem por objetivo a eliminação do radical)

$$p = \operatorname{sh} \alpha \Rightarrow dp = \operatorname{ch} \alpha d\alpha \Rightarrow \sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \alpha} = \operatorname{ch} \alpha$$

Substituindo esses resultados em (C.62), encontramos

$$d\alpha = \frac{\rho g}{H} dx$$

cujas soluções são imediatas

$$\alpha = \frac{\rho g}{H} x + \operatorname{const.}$$

Vamos, agora, voltar às variáveis iniciais

$$\operatorname{arg} \operatorname{sh} p = \frac{\rho g}{H} x + \operatorname{const.} \Rightarrow p = \operatorname{sh} \left(\frac{\rho g}{H} x + \operatorname{const.} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \left(\frac{\rho g}{H} x + \operatorname{const.} \right) \quad (\text{C.63})$$

No ponto $x = 0$, $dy/dx = 0$ (veja a figura inicial). Logo, a constante que aparece na expressão (C.63) é zero. Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{\rho g x}{H} \Rightarrow y = \frac{H}{\rho g} \operatorname{ch} \frac{\rho g x}{H} + \operatorname{const.}$$

Mas, de acordo com o eixo de coordenadas que escolhemos, em $x = 0$ temos $y = 0$. Assim, a constante da relação acima pode ser diretamente calculada, dando $-H/\rho g$. Então, o resultado final é dado por

$$y = \frac{H}{\rho g} \left(\operatorname{ch} \frac{\rho g x}{H} - 1 \right)$$

Esta é a equação de uma catenária. No Capítulo 11 é apresentada uma outra maneira de resolver este problema, através do Cálculo Variacional.

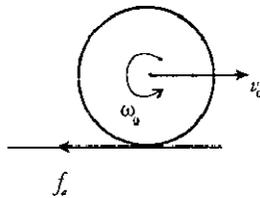
Exercício 10.19

a) Existe uma força de atrito entre a bola e a superfície porque está havendo deslizamento (veja a figura). As equações decorrentes das leis de Newton são

$$M \frac{dv_{CM}}{dt} = -f_a \quad (C.64)$$

$$-f_a R = \frac{2}{5} MR^2 \frac{d\omega_{CM}}{dt} \quad (C.65)$$

Figura C.46: Exercício 10.19.



Combinando (C.64) e (C.65), vem

$$dv_{CM} = \frac{2}{5} R d\omega_{CM}$$

Para que a bola deslize até parar, temos

$$\int_{v_0}^0 dv_{CM} = \frac{2}{5} R \int_{\omega_0}^0 d\omega_{CM} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{5} \omega_0 R \quad (C.66)$$

b) Neste caso, no instante em que a bola pára, a velocidade angular não deve ser zero. Chamemos esta velocidade de ω' . Usando a relação (C), temos

$$\int_{v_0}^0 dv_{CM} = \frac{2}{5} R \int_{\omega_0}^{\omega'} d\omega_{CM} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{5} R(\omega_0 - \omega')$$

No movimento de volta, a força de atrito acelera o CM desde $v_{CM} = 0$ até a velocidade final $3v_0/7$ (a partir daí o movimento será sem deslizamento). Entretanto, o torque desta força em relação ao CM retarda o movimento de rotação (veja a figura). Assim, em lugar da expressão (C), deveremos usar

$$dv_{CM} = -\frac{2}{5} R d\omega_{CM} \quad (C.67)$$

Portanto,

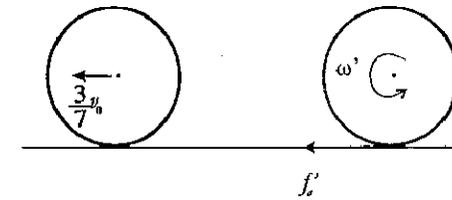
$$\int_0^{3v_0/7} dv_{CM} = -\frac{2}{5} R \int_{\omega'}^{\omega_0} d\omega_{CM} \Rightarrow \frac{3}{7} v_0 = -\frac{2}{5} R (\omega_0 - \omega') \quad (C.68)$$

No limite superior da segunda integral acima, foi feito que ω é igual a v_0/R porque o rolamento naquele ponto já é sem deslizamento.

Eliminando ω' das equações (C) e (C.68), obtemos

$$v_0 = \frac{1}{4} \omega_0 R$$

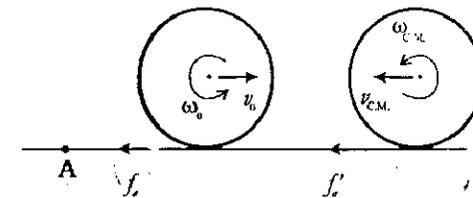
Figura C.47: Exercício 10.19.



Há uma outra maneira, mais imediata, de se resolver este exercício. Note que em relação a um ponto da superfície (na linha de ação da bola), o torque é zero. Assim, em relação a este ponto, o momento angular se conserva!

Consideremos a situação inicial, quando a bola é arremessada, e uma outra situação qualquer, como mostra a figura abaixo, onde A é um ponto em relação ao qual o momento angular se conserva.

Figura C.48: Exercício 10.19.



A conservação do momento angular para as duas situações acima fornece

$$Mv_0R - \frac{2}{5} MR^2 \omega_0 = -Mv_{CM}R - \frac{2}{5} MR^2 \omega_{CM} \quad (C.69)$$

onde o primeiro termo dos dois lados da equação acima corresponde ao momento angular do CM e o segundo termo, o momento angular em relação ao CM

Na expressão (C.69), foi considerado como positivo o sentido do momento angular voltado para dentro da folha. Fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$v_o - \frac{2}{5}R\omega_o = -v_{CM} - \frac{2}{5}R\omega_{CM}$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{a) } v_{CM} = 0, \omega_{CM} = 0 &\Rightarrow v_o = \frac{2}{5}R\omega_o \\ \text{b) } v_{CM} = \frac{2}{7}v_o, \omega_{CM} = \frac{3v_o}{7R} &\Rightarrow v_o = \frac{1}{4}R\omega_o \end{aligned}$$

Exercício 11.3

Um elemento de linha sobre uma superfície esférica de raio R é dado por

$$ds = \sqrt{R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2}$$

A expressão acima pode ser convenientemente escrita de duas maneiras

$$ds = R \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2} d\theta \Rightarrow F_1 = \sqrt{1 + \sin^2 \theta \phi'^2} \quad (\text{C.70})$$

$$ds = R \sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 + \sin^2 \theta} d\phi \Rightarrow F_2 = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta} \quad (\text{C.71})$$

No primeiro caso, ϕ' está representando a derivada de ϕ em relação a θ e no segundo, θ' é a derivada de θ em relação a ϕ . Para (C.70), teríamos,

$$\frac{\partial F_1}{\partial \phi} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F_1}{\partial \phi'} = 0 \quad (\text{C.72})$$

e para (C.71),

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta} - \frac{d}{d\phi} \frac{\partial F_2}{\partial \theta'} = 0 \quad (\text{C.73})$$

É melhor usar (C.72) onde temos diretamente

$$\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = a \text{ (constante)} \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta \phi'}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \phi'^2}} = a \Rightarrow \sin^2 \theta \phi'^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta - a^2}$$

Vamos substituir este resultado no comprimento de arco sobre a esfera

$$\begin{aligned} S_{AB} &= R \int_A^B \sqrt{1 + \sin^2 \theta \phi'^2} d\theta = R \int_A^B \sqrt{1 + \frac{a^2}{\sin^2 \theta - a^2}} d\theta \\ &= R \int_A^B \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - a^2}} = -R \int_A^B \frac{d(\cos \theta)}{\sqrt{1 - a^2 - \cos^2 \theta}} \\ &= -R \int_A^B \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}} \end{aligned}$$

onde $b^2 = 1 - a^2$. Fazendo $u = b \sin \alpha \Rightarrow du = b \cos \alpha d\alpha$, diretamente encontramos que

$$S_{AB} = R \Delta \alpha$$

O que mostra que, realmente, S_{AB} é um arco de círculo de raio R .

Exercício 12.2

A lagrangiana em coordenadas cilíndricas é dada por

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Usando a condição de vínculo $\text{tg } \alpha = \rho/z$, encontramos

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{\text{tg}^2 \alpha} \dot{\rho}^2 \right) - \frac{mg}{\text{tg } \alpha} \rho$$

Como podemos observar, a coordenada ϕ é cíclica. Logo, o momento conjugado correspondente é uma constante do movimento,

$$l = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2 \dot{\phi}$$

Esta é a mesma constante obtida no Capítulo 8 [veja Eq. (8.47)] que, juntamente com a expressão da conservação da energia ($T + V$), fornecem o material suficiente para analisar o problema através das curvas de potencial, exatamente como foi feito no Capítulo 8.

Exercício 12.3

A lagrangiana do sistema é dada por (em coordenadas esféricas)

$$L = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgR \cos \theta$$

A coordenada cíclica ϕ leva à constante

$$l = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

A outra constante é a hamiltoniana (no caso, a energia total) pois L não depende explicitamente do tempo.

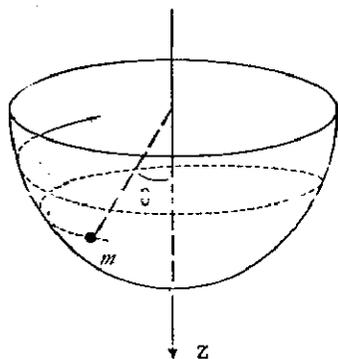
$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} mR^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - mgR \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} - mgR \cos \theta \end{aligned}$$

onde, na última passagem, usamos a expressão da conservação do momento canônico l .

Vamos fazer a representação gráfica de $V(\theta)$ que convenientemente escrevemos como

$$V(\theta) = \frac{l^2}{2mR^2 (1 - \cos^2 \theta)} - mgR \cos \theta$$

Figura C.49: Exercício 12.3.



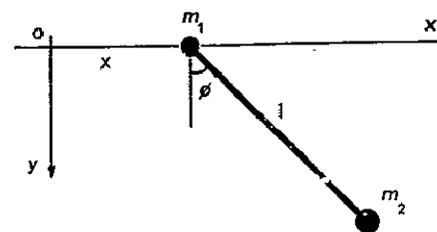
Há várias análises que podem ser feitas a partir do gráfico acima, similares às que foram feitas no caso anterior (veja Capítulo 8).

Exercício 12.12

A velocidade de m_2 pode ser obtida diretamente pela identificação do vetor \vec{v}_2 como mostra a figura abaixo

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= (x + l \sin \phi) \hat{i} + l \cos \phi \hat{j} \Rightarrow \vec{v}_2 = (\dot{x} + l \cos \phi \dot{\phi}) \hat{i} - l \sin \phi \dot{\phi} \hat{j} \\ \Rightarrow \vec{v}_2^2 &= (\dot{x} + l \cos \phi \dot{\phi})^2 + l^2 \sin^2 \phi \dot{\phi}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + 2l \cos \phi \dot{x} \dot{\phi} \end{aligned}$$

Figura C.50: Exercício 12.12.



Considerando que a velocidade da partícula de massa m_1 é $\vec{v}_1 = \dot{x} \hat{i}$, temos a seguinte lagrangiana para o sistema

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l (\dot{\phi}^2 + 2 \dot{x} \dot{\phi} \cos \phi) + m_2 g l \cos \phi$$

A coordenada x é cíclica, logo,

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\phi} \cos \phi = \text{const.}$$

P_x é a componente em x do momento linear total do sistema. Podemos escolher um referencial inercial tal que $P_x = 0$. Fazendo isto, temos

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l \cos \phi}{m_1 + m_2} \dot{\phi}$$

Levando este resultado na expressão da lagrangiana, obtemos

$$L = \frac{1}{2} m_2 l^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \phi \right) \dot{\phi}^2 + m_2 g l \cos \phi$$

Fazendo a aproximação para pequenas oscilações, vem

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m_2 g l \phi^2$$

onde foram desprezados os termos constantes. Calculando a equação de Euler-Lagrange temos

$$\ddot{\phi} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l} \phi = 0$$

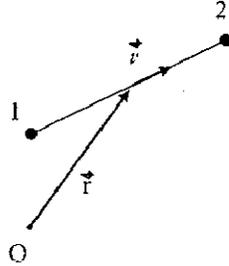
de onde identificamos a frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}$$

Exercício 12.17

As condições estabelecidas pelo problema acham-se dispostas na figura abaixo.

Figura C.51: Exercício 12.17.



O comprimento da haste sendo constante, temos

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2$$

O vetor posição do centro da haste vale

$$\vec{r} = \frac{x_1 + x_2}{2} \hat{i} + \frac{y_1 + y_2}{2} \hat{j}$$

Conseqüentemente, a velocidade do centro da haste é dada por

$$\vec{v} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \hat{i} + \frac{1}{2} (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) \hat{j}$$

Para que \vec{v} seja paralelo à direção da haste, deveremos ter

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Exercício 13.1

Vamos considerar matrizes 3×3 , mas a demonstração pode ser feita diretamente para qualquer ordem

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \det(AB) &= \epsilon_{lmn} (AB)_{li} (AB)_{mj} (AB)_{nk} = \epsilon_{lmn} A_{lr} B_{ri} A_{ms} B_{sj} A_{nt} B_{tk} \\ &= \epsilon_{lmn} A_{lr} A_{ms} A_{nt} B_{ri} B_{sj} B_{tk} = \epsilon_{rst} (\det A) B_{ri} B_{sj} B_{tk} \\ &= \det A \epsilon_{ijk} \det B \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(AB) = \det A \det B$$

Exercício 13.4

A relação $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \mathbf{1} \delta_{ij}$, pode ser verificada diretamente sem problemas através do uso direto das matrizes de Pauli. Usando esta relação, mostramos as outras

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \times \vec{\sigma} &= \epsilon_{ijk} \sigma_i \sigma_j \hat{e}_k = \epsilon_{ijk} (i \epsilon_{ijl} \sigma_l + \mathbf{1} \delta_{ij}) \hat{e}_k \\ &= i \epsilon_{jki} \epsilon_{ijl} \sigma_l \hat{e}_k = i (\delta_{jj} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{kj}) \sigma_l \hat{e}_k \\ &= 2i \delta_{kl} \sigma_l \hat{e}_k = 2i \sigma_k \hat{e}_k \\ &= 2i \vec{\sigma} \end{aligned}$$

onde na quarta passagem acima foi usada a relação (13.44).

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = a_i \sigma_i b_j \sigma_j = a_i b_j \sigma_i \sigma_j = a_i b_j (i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \mathbf{1} \delta_{ij}) = \mathbf{1} \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

Exercício 14.3

a) Pela equação de Maxwell $\text{div } \vec{B} = 0$, temos que o campo magnético \vec{B} é um campo rotacional, isto é, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Assim, considerando que $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, temos

$$B_0 \hat{k} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k} \Rightarrow A_y = \alpha B_0 x A_x = (\alpha - 1) B_0 y$$

b) A hamiltoniana é a energia total.

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2$$

onde estamos trabalhando no sistema gaussiano de unidades. Substituindo a expressão de \vec{A} , obtida no item anterior, temos

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{qB_0}{mc} [(\alpha - 1)y p_x + \alpha x p_y] + \frac{q^2 B_0^2}{2mc^2} [(\alpha - 1)^2 y^2 + \alpha^2 x^2]$$

As equações de Hamilton que dão a dinâmica do sistema são

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{qB_0 c}{mc} p_y - \frac{q^2 B_0^2 \alpha^2}{mc^2} x \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{qB_0(1-\alpha)}{mc} p_x - \frac{q^2 B_0^2 (1-\alpha)^2}{mc^2} y \end{aligned}$$

Usando as relações dos momentos canônicos de uma partícula movendo-se num campo magnético,

$$p_x = m\dot{x} + \frac{q}{c} A_x = m\dot{x} + \frac{q}{c}(\alpha - 1)B_0 y$$

$$p_y = m\dot{y} + \frac{q}{c} A_y = m\dot{y} + \frac{q}{c}\alpha B_0 x$$

obtemos as equações

$$m\ddot{x} - \frac{qB_0}{c}\dot{y} = 0$$

$$m\ddot{y} + \frac{qB_0}{c}\dot{x} = 0$$

Como vemos, estas equações não dependem realmente do parâmetro α (o que está relacionado com a invariância de calibre da teoria eletromagnética) e é fácil ver que elas são as mesmas obtidas a partir da segunda lei de Newton e da força de Lorentz.

Esta independência da teoria em relação ao parâmetro α poderia ter sido usada desde o início, escolhendo-se um α conveniente (escolha de calibre) a fim de trabalhar com grandezas mais simples. Por exemplo, poderíamos ter escolhido $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ (ou um outro valor qualquer).

Exercício 14.7

a) Como as quantidades A e B não dependem explicitamente do tempo, para mostrar que são constantes basta mostrar que os parênteses de Poisson delas com a hamiltoniana são nulos

$$\begin{aligned} \{A, H\} &= \{q_1 q_2, q_1 p_1 - q_2 p_2\} + (\text{termos nulos}) \\ &= q_1 q_2 \{q_1, p_1\} - q_1 q_2 \{q_2, p_2\} \\ &= q_1 q_2 - q_1 q_2 = 0 \end{aligned}$$

onde usaram-se os parênteses fundamentais de Poisson

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$$

Para a quantidade B , temos

$$\begin{aligned} \{B, H\} &= \left\{ \frac{p_1 - a q_1}{q_2}, q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2 \right\} \\ &= \frac{p_1}{q_2} \{p_1, q_1\} - \frac{a q_1}{q_2} \{q_1, p_1\} - q_2 (p_1 - a q_1) \left\{ \frac{1}{q_2}, p_2 \right\} - \frac{a}{q_2} \{p_1, q_1^2\} \\ &= \frac{p_1}{q_2} - \frac{a q_1}{q_2} - q_2 (p_1 - a q_1) \frac{-1}{q_2^2} - \frac{a}{q_2} (-2 q_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Considerando a identidade de Jacobi entre A , B e H , temos

$$\{A, \{B, H\}\} + \{B, \{H, A\}\} + \{H, \{A, B\}\} = 0$$

Como as quantidades A e B são consideradas constantes, temos que os dois primeiros termos da expressão acima são nulos. Logo,

$$\{H, \{A, B\}\} = 0$$

o que mostra que realmente $\{A, B\}$ é também uma constante.

Para o caso de A e B do nosso exemplo, temos que o resultado é $\{A, B\} = 1$, que é uma constante trivial.

APÊNDICE D

Resposta de alguns exercícios

Capítulo 1

2. a) $x = 3 \text{ m}$, $x = 14,5 \text{ m}$ e $x \rightarrow \infty$

b) $t = 2 \text{ s}$ e $t = 3 \text{ s}$

c) $t < 2,0 \text{ s}$: retardado

$2 < t < 2,5 \text{ s}$: acelerado

$2,5 < t < 3,0 \text{ s}$: retardado

$t > 3,0 \text{ s}$: acelerado

d) $a(t) = 6t - 15$

3. a) $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$

$v(1) = -0,7 \text{ m/s}$

$v(2) = 0,7 \text{ m/s}$

b) $x(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1$

$x(1) = 0,6 \text{ m}$

$x(2) = 0,3 \text{ m}$

c) Ele pára em $x = 1$ e $x = 0,25 \text{ m}$.

$t < -1,7 \text{ s}$: retardado

$-1,7 < t < -1 \text{ s}$: acelerado

$-1 < t < 0 \text{ s}$: retardado

$0 < t < 1 \text{ s}$: acelerado

$1 < t < 1,7 \text{ s}$: retardado

$t > 1,7 \text{ s}$: acelerado

$t < -1,7 \text{ s}$: voltando ($v < 0$)

$-1,7 < t < 0 \text{ s}$: indo ($v > 0$)

$0 < t < 1,7 \text{ s}$: voltando ($v < 0$)

$t > 1,7 \text{ s}$: indo ($v > 0$)

d) $v_m = -0,3 \text{ m/s}$

$a_m = 1,4 \text{ m/s}^2$

4. a) $-A \leq x \leq A$

b) A é a amplitude do movimento.

$\omega = 2\pi/T$ é a frequência angular.

c) $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

$a = -\omega^2 x$

7. a) $v(t) = \frac{v_0}{kv_0 t + 1}$

$x(t) = x_0 + \frac{1}{k} \ln(kv_0 t + 1)$

$v(x) = v_0 e^{-k(x-x_0)}$

Capítulo 3

2. $1,7 \text{ m}$, $\vec{v} = 1,5 \hat{i} - 2,4 \hat{j} \text{ m/s}$ e 30°

3. $32,1 \text{ km}$

6. $\vec{F}_M = G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$

$$\vec{F}_m = -Gm \left[\frac{M}{r^2} + \frac{m'}{(r-x)^2} \right] \hat{r}$$

$$\vec{F}'_m = G \frac{mm'}{(r-x)^2} \hat{r}$$

7. $\vec{g} = \frac{2gM}{R^2} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \hat{i} \right) \hat{k}$

Para $z \gg R \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{z^2} \hat{k}$

Para a esfera de massa M e raio R , temos

$$\vec{g} = -\frac{GM}{z^2} \hat{k} \text{ para } z > R.$$

11. a) Para $z \gg R \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{z^2} \hat{k}$

b) $\sqrt{2GM \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} \right)}$

O movimento será oscilatório entre $z = \pm h$.

Capítulo 4

2. Sim. $v = 97 \text{ km/h}$

4. b) $\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta}}$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}$$

(para $\cos \theta > \mu \sin \theta$)

5. $m_C = 5 \text{ kg}$

6. b) $a = 20 \text{ m/s}^2$

c) Não

9. $\theta = \arccos \frac{m}{M}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{Mg}}$$

10. a) $F_{AC} = \frac{m\omega^2 l(2m+M)}{2(m+M)}$

$$F_{BC} = \frac{mM\omega^2 l}{2(m+M)}$$

b) $\theta = \arccos \frac{g(m+M)}{m\omega^2 l}$

11. $\alpha = \frac{m_1 \ddot{m}_z}{m_1 + m_2} g$

12. 1125 N , 375 N e 2250 N

15. θ é a solução de

$$2 \sin \theta + \cos \theta \operatorname{tg} 2\theta = \frac{mg}{2b\omega_0}$$

Capítulo 5

1. $v = A\omega \cos(\omega t + \phi) = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

Capítulo 7

2. a) $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 3\hat{j} - 2\hat{i}$

Haverá colisão se $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ for paralelo a $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$

(o que não é o caso).

b) $t = 1,15 \text{ s}$ $d = 0,83 \text{ s}$

4. $t = 0,77 \text{ s}$

5. 54 km/h

9. a) $6t^2 \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

b) Não

11. Não atinge o juiz J_1 e J_2 .

Capítulo 8

1. a) -2 J

b) 0

c) 50 J

2. $-\frac{1}{2} kx^2$

3. a) $\frac{1}{2} \text{ J}$

b) $\frac{17}{35} \text{ J}$

4. $\theta = \arcsen \frac{2}{3} \approx 42^\circ$

6. $h = 10 \text{ m}$

8. $v_0 = 0,67 \text{ m/s}$

9. b) $x = 0$

c) $0 < E < \frac{4a^2}{27b^2}$

d) $\vec{r} = \frac{a^2}{b} \hat{i}$

10. a) $\vec{E}_p = 3x^2 - x^2$

b) $0 < E_M < 4 \text{ J}$

c) $E_M = 3 \text{ J}$ $-0,880 \leq x \leq 1,35$ $x \geq 2,53$

$$E_M = 5 \text{ J}$$
 $x \geq 1,1$

d) $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$

e) $x = -1 \Rightarrow v = 1,4 \text{ m/s}$

$x = 4 \Rightarrow v = 6,48 \text{ m/s}$

11. a) $\vec{F} = \left(-\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}} \right) \hat{i}$

c) $T = \frac{2\pi}{3a} \left(\frac{mb^4}{4a} \right)^{1/6}$

14. a) $V = -\frac{Gm}{r}$

b) $V_{ext} = -\frac{GM}{r}$

$$V_{int} = -\frac{GM}{R} \text{ (constante)}$$

c) $V = -\frac{2GM}{R^2} (\sqrt{R^2+z^2} - z)$

16. a) $m\ddot{x} = kx - \alpha y = 0$

$$m\ddot{y} = ky - \alpha x = 0$$

b) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k-\alpha}{m}}$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+\alpha}{m}}$$

17. $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kh^2}{ml^2}}$$

19. b) $f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2Da^2}{m}}$
 $m = m_H$ ($m_{Cl} \gg m_H$)

c) $1,3 \times 10^{-8} \text{ N}$

21. a) $\gamma = \frac{1}{2\pi r m_0}$

b) $A(t_0) = \sqrt{\frac{2E_0}{ke}}$

23. a)

$$\vec{r} = 144t(3t+2)\hat{i} + 36(3t+2)\hat{j} - 288t^2(t-3)\hat{k}$$

b)

$$\vec{r} = 144t^2(t+1)\hat{i} + 18(3t^2+4t-4)\hat{j} - 72t^3(t-4)\hat{k}$$

30. b) $V = \frac{V_0 b}{\sqrt{\frac{G^2 M^2}{V_0^4} + b^2} - \frac{GM}{V_0^2}}$

$$u = \sqrt{\frac{G^2 M^2}{V_0^4} + b^2} - \frac{GM}{V_0^2}$$

31. $\vec{I}_p = 2mrv \cos^2 \theta \hat{k}$

Não é constante.

33. b) $m\ddot{\xi}_1 + 2k\xi_1 - k\xi_2 - k\xi_3 = 0$

$$m\ddot{\xi}_2 - k\xi_1 + 2k\xi_2 - k\xi_3 = 0$$

$$m\ddot{\xi}_3 - k\xi_1 - k\xi_2 + 2k\xi_3 = 0$$

$$\omega = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

35. a) $E_p = \frac{1}{2} k (\xi_2 - \xi_1)^2$

b) $m_1 \ddot{\xi}_1 - k\xi_2 + k\xi_1 = 0$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 + k\xi_2 - k\xi_1 = 0$$

c) $\omega = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Capítulo 9

3. $v_A = \frac{m(m+2M)}{(m+M)^2} v$

$$v_B = \frac{m(m+2M)}{M(m+M)} v$$

4. A colisão ocorrerá no CM (0,44 m de A).

8. $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu}{k}}$ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

10. $\phi_1 = \arccos 2 = 63^\circ 26'$

$$\phi_2 = 45^\circ$$

11. c) $m = 0,12 m_0$

$$v = 2,8 v_0$$

$$E_c = 0,95 E_0$$

$$v = 1,8 v_0$$

$$E_c = 0,39 E_0$$

$$15. V_{CM} = \frac{1}{2} V$$

$$\omega = \frac{V}{l}$$

$$16. \text{ O ponto } O \text{ gira em torno do CM com } \frac{3}{4} \omega.$$

(num raio de $l/3$)

$$18. \text{ O CM desloca-se com } \frac{1}{3} V \hat{i}.$$

$$\text{Há uma rotação em torno do CM } \omega = \frac{\sqrt{2} V}{4l}.$$

Capítulo 10

$$6. \text{ a) } E_{c,transl.} = 6,3 \times 10^{-2} J$$

$$E_{c,rot.} = 3,1 \times 10^{-2} J$$

$$7. \text{ a) } \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{12gb}{l^2 + 12b^2} \theta = 0$$

$$\text{b) } \theta(t) = \theta_0 \sin \left(\sqrt{\frac{12gb}{l^2 + 12b^2}} t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{c) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 + 12b^2}{12gb}}$$

$$8. T = 2\pi R \sqrt{\frac{2}{gl}}$$

$$9. \text{ a) } \omega = 1,4 \text{ rad/s}$$

$$\phi = 57^\circ 30'$$

b) Não

$$14. \bar{v}_{CM} = -\frac{Ft}{M} \hat{i}$$

$$\bar{\omega}_{CM} = \frac{2Ft}{MR} \hat{k}$$

$$15. m = \frac{Ml^2}{l^2 + 12d^2}$$

$$16. \text{ a) } a = \frac{2F}{3m}$$

$$\text{b) } 2F/3 \text{ para frente (roda da frente)}$$

$$F/3 \text{ para trás (roda de trás)}$$

$$17. T = 286 N$$

$$20. T_1 = 1,5 \times 10^4 N$$

$$T_2 = 1,6 \times 10^4 N$$

$$T_3 = 2,0 \times 10^4 N$$

22. $K\omega$ I é o momento de inércia em relação a z' .

$$25. \frac{1}{8} MR^2 \omega^2 \sin 2\theta$$

$$29. 10 ma^2, 10 ma^2, 2 ma^2$$

$$30. \sigma l^4/72, \sigma l^4/24$$

σ = densidade superficial de massa

l = cateto do triângulo

$$31. \theta = \arccos \frac{10}{17}$$

Capítulo 12

$$4. \frac{Img \sin \phi}{I + ma^2}$$

$$7. \text{ a) } L = \frac{1}{2} m(l+h)^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)$$

$$-\frac{1}{2} mg(l+h)(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$-\frac{1}{2} \gamma h^2 (\phi_2 - \phi_1)^2$$

$$\text{b) } m(l+h)^2 \ddot{\phi}_1 + [mg(l+h) + \gamma h^2] \phi_1 - \gamma h^2 \phi_2 = 0$$

$$m(l+h)^2 \ddot{\phi}_2 + [mg(l+h) + \gamma h^2] \phi_2 - \gamma h^2 \phi_1 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l+h} + \frac{2\gamma h^2}{m(l+h)^2}}$$

$$8. \ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha y = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \alpha x = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha}$$

$$10. L = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2) + \frac{1}{2} M \dot{\xi}_2^2$$

$$-\frac{1}{2} k [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_1 - \xi_2)^2]$$

onde $\xi_i = x_i - x_{i0}$ são deslocamentos em torno da posição de equilíbrio.

$$\omega = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

$$11. L = \frac{1}{2} m(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2)$$

$$-\frac{1}{2} k [(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2]$$

$$\omega = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$14. \omega = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} [(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm$$

$$\sqrt{(m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2)l_1 l_2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$15. \omega = \sqrt{\frac{k(l-l_0)}{Im}}$$

$$16. \omega = \sqrt{\frac{k(l-l_0)(R+l)}{RIm}}$$

Capítulo 13

2. δ_{ij} é um tensor e ϵ_{ijk} é um pseudotensor.

$$5. \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$