



Física Computacional

Cálculo Numérico
Métodos Iterativos: Parte 2

Lucas Stori de Lara

Ponta Grossa, 03/2020

ESTIMATIVA DO NÚMERO DE ITERAÇÕES

Dada uma precisão ϵ e um intervalo inicial $[a, b]$, é possível saber, *a priori*, quantas iterações serão efetuadas pelo método da bissecção até que se obtenha $b - a < \epsilon$, usando o Algoritmo 1.

Vimos que

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Deve-se obter o valor de k tal que $b_k - a_k < \epsilon$, ou seja,

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \epsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \Rightarrow k \log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon) \Rightarrow$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\epsilon)}{\log(2)}$$

Por exemplo, se desejarmos encontrar ξ , o zero da função $f(x) = x \log(x) - 1$ que está no intervalo $[2, 3]$ com precisão $\epsilon = 10^{-2}$, quantas iterações, no mínimo, devemos efetuar?

$$k > \frac{\log(3 - 2) - \log(10^{-2})}{\log(2)} = \frac{\log(1) + 2 \log(10)}{\log(2)} = \frac{2}{0.3010} \approx 6.64 \Rightarrow k = 7$$

OBSERVAÇÕES FINAIS

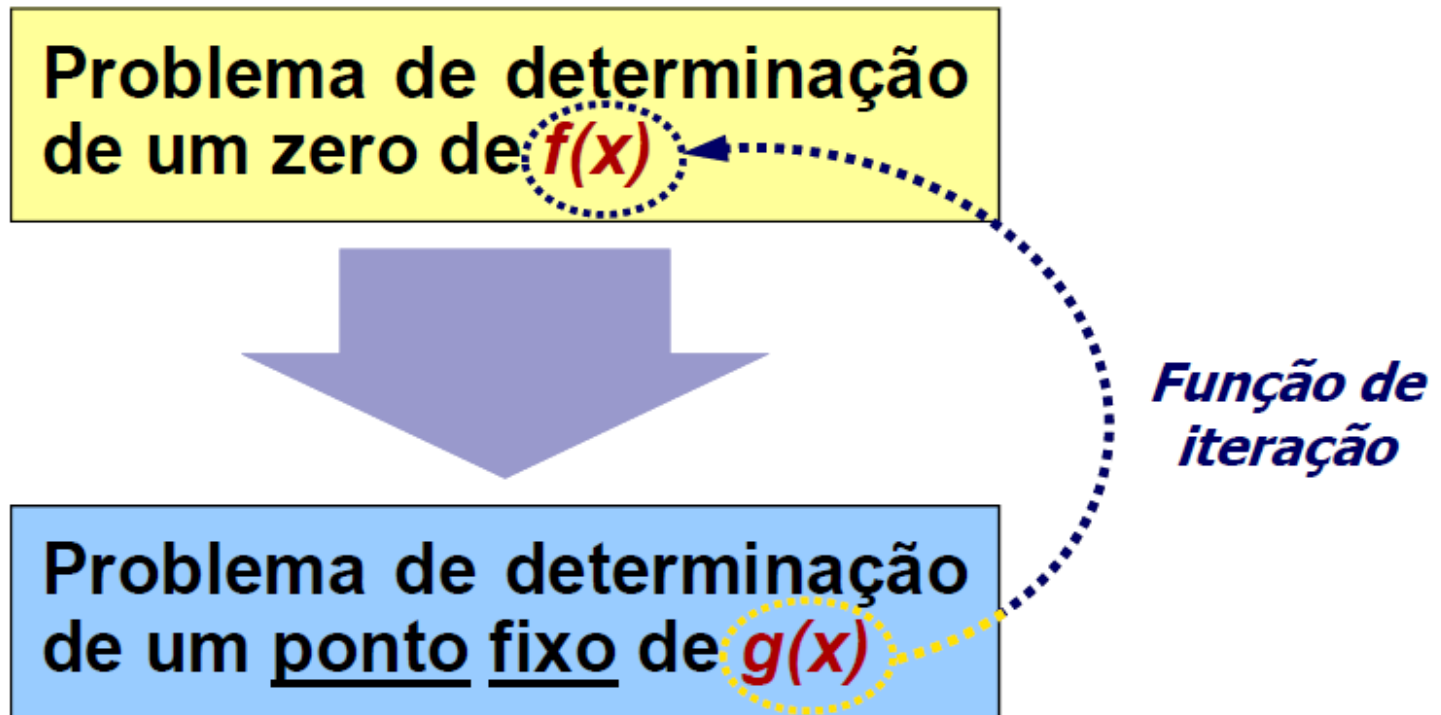
- conforme demonstramos, satisfeitas as hipóteses de continuidade de $f(x)$ em $[a, b]$ e de troca de sinal em a e b , o método da bissecção gera uma seqüência convergente, ou seja, é sempre possível obter um intervalo que contém a raiz da equação em estudo, sendo que o comprimento deste intervalo final satisfaz a precisão requerida;
- as iterações não envolvem cálculos laboriosos;
- a convergência é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que $b_0 - a_0 \gg \varepsilon$ e se ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande, como por exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} b_0 - a_0 = 3 \\ \varepsilon = 10^{-7} \end{array} \right\} \Rightarrow k \geq 24.8 \Rightarrow k = 25.$$

O Algoritmo 1 pode incluir também o teste de parada com o módulo da função e o do número máximo de iterações.

Cálculo Numérico – **Ponto Fixo**

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)
 - Implicação de tal procedimento:



- Mais importante a abordagem conceitual do que a eficiência computacional.

- Método do *Ponto Fixo* (*MPF*)

Forma geral das funções de iteração:

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

com $A(\xi) \neq 0$ em ξ , *ponto fixo* de $g(x)$.

- Interpretação Gráfica

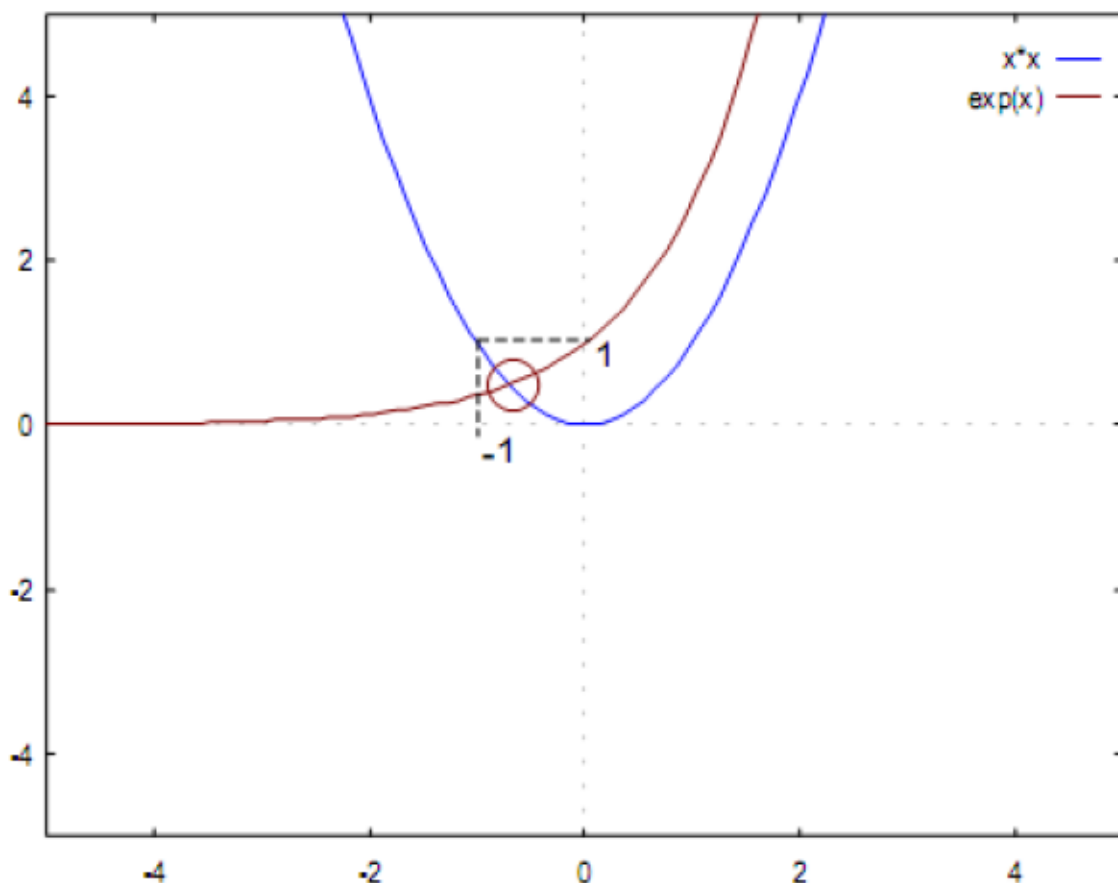
- $x = g(x)$ tem como *raiz* a abcissa do ponto de intersecção da reta $r(x) = x$ e da curva $g(x)$.

Exemplo : Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 - e^x$, usando o Método da Iteração Linear (Pontos Fixos).

1 - Encontrando o intervalo da raiz:

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

$$g(x) = x^2 \text{ e } h(x) = e^x$$



2 - Escolha uma função de iteração $\phi(x)$:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - e^x = 0$$

$$x = \pm \sqrt{e^x}$$

Ou seja, podemos ter como função de iteração:

$$\phi(x) = \sqrt{e^x}$$

$$\phi(x) = -\sqrt{e^x}$$

3 – Usando $\phi(x) = -\sqrt{e^x}$ e $x_0 = -1$, temos:

$$x_0 = -1 \rightarrow \phi(x_0) = \phi(-1) = -\sqrt{e^{-1}} = -0,606$$

$$x_1 = -0,606 \rightarrow \phi(x_1) = \phi(-0,606) = -\sqrt{e^{-0,606}} = -0,738$$

$$x_2 = -0,738 \rightarrow \phi(x_2) = \phi(-0,738) = -\sqrt{e^{-0,738}} = -0,691$$

$$x_3 = -0,691 \rightarrow \phi(x_3) = \phi(-0,691) = -\sqrt{e^{-0,691}} = -0,707$$

$$x_4 = -0,707$$

4 – Substituindo os valores de x_k em $f(x)$ para cada iteração k , observamos que a cada etapa, nos aproximamos da raiz de $f(x)$, conforme tabela abaixo:

x	$f(x) = x^2 - e^x$
-1	0,632
-0,606	-0,178
-0,738	0,067
-0,691	-0,024
-0,707	0,007

Seja a equação $x^2 + x - 6 = 0$.

Funções de iteração possíveis:

▶ $g_1(x) = 6 - x^2$

▶ $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$

▶ $g_3(x) = 6/x - 1$

▶ $g_4(x) = 6/(x + 1)$



Dada uma equação do tipo $f(x) = 0$, há para tal equação *mais de uma função* de iteração $g(x)$, tal que:
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$

- Não há necessidade de uso de método numérico para a determinação das raízes $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
- Utilização desta exemplo para demonstrar a convergência ou divergência numérica e gráfica do processo iterativo
- Seja a raiz $\xi_2 = 2$ e $g_1(x) = 6 - x^2$
- Considere-se $x_0 = 1,5$ e $g(x) = g_1(x)$

Seja a raiz $\xi_2 = 2$, $x_0 = 1,5$ e $g_1(x) = 6 - x^2$:

- $x_1 = g(x_0) = 6 - 1,5^2 = 3,75 \Leftrightarrow x_1$
- $x_2 = g(x_1) = 6 - 3,75^2 = -8,0625$
- $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8,0625)^2 = -59,003906$
- $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59,003906)^2 = -3475,4609$
- $\vdots$
- Conclui-se que $\{x_k\}$ não convergirá para $\xi_2 = 2$

$$g_2(x) = \sqrt{6 - x} \text{ e } x_0 = 1,5$$

- $x_1 = g(x_0) = \sqrt{6 - 1,5} = 2,121320343$
- $x_2 = g(x_1) = \sqrt{6 - 2,121320343} = 1,969436380$
- $x_3 = g(x_2) = \sqrt{6 - 1,969436380} = 2,007626364$
- $x_4 = g(x_3) = \sqrt{6 - 2,007626364} = 1,998092499$
- $x_5 = g(x_4) = \sqrt{6 - 1,998092499} = 2,000476818$
- ⋮
- Conclui-se que $\{x_k\}$ tende a convergir para $\xi_2 = 2$

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho regular e previsível.

Desvantagens:

- Um inconveniente é a necessidade da obtenção de uma função de iteração $g(x)$;
- Difícil sua implementação.