



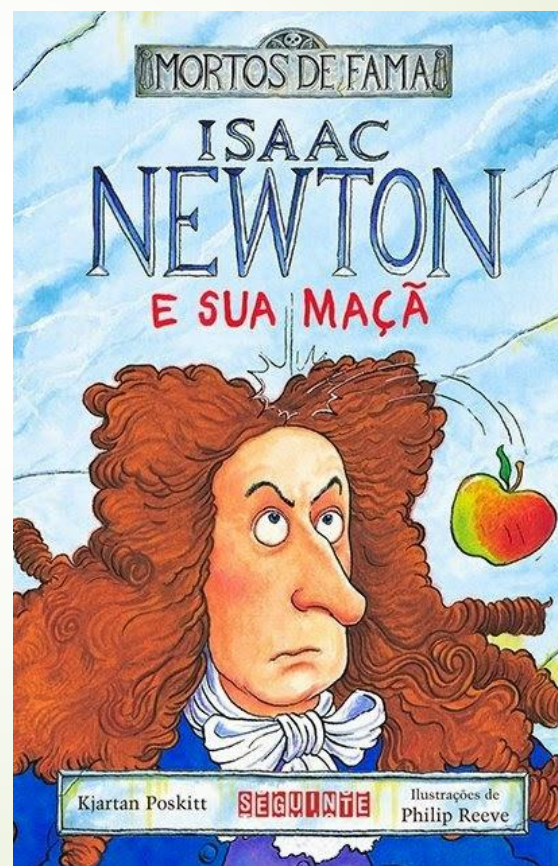
Mecânica Clássica

Equações de
movimentos

Lucas Stori de Lara

Ponta Grossa, 02/2020

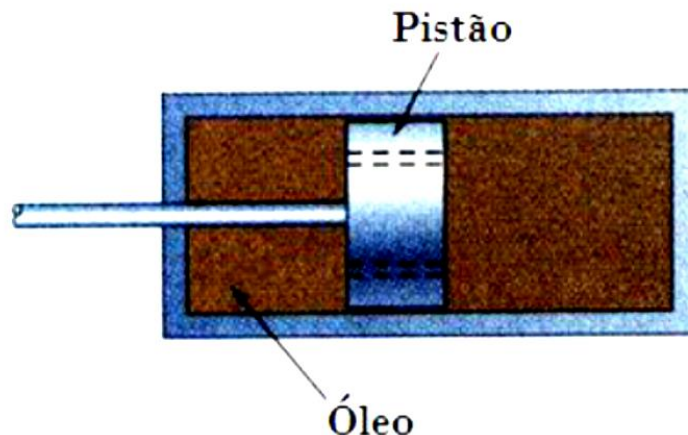
Mecânica Clássica



Exemplo cinemático linear

O mecanismo de freio usado para reduzir o recuo em certos tipos de arma consiste em um pistão preso ao cano e que se move em um cilindro fixo, cheio de óleo. Quando o cano recua com velocidade inicial v_0 , o pistão se move e o óleo é forçado através de orifícios em seu interior, causando uma desaceleração do pistão e do cano a uma taxa proporcional à velocidade de ambos.

Determine $v(t)$, $x(t)$, e $v(x)$.

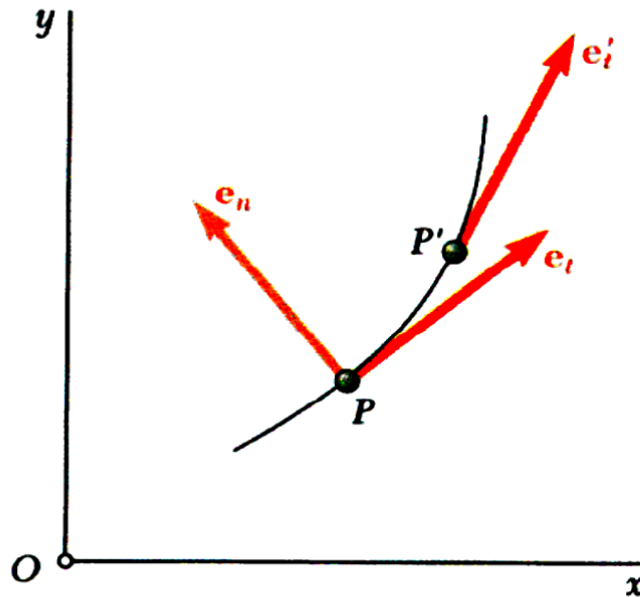


$$a = -kv$$

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Tangencial e Normal

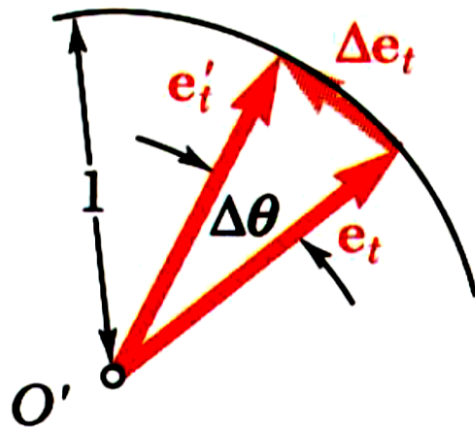
- O vetor velocidade de uma partícula é tangente à sua trajetória, mas, em geral, a aceleração não é tangente a essa trajetória. Deseja-se então, expressar a aceleração da partícula em termos de componentes tangencial e normal à trajetória.



Exemplo cinemático rotacional

Componentes Tangencial e Normal

- Na figura, $\vec{e}_t$ e $\vec{e}'_t$ são vetores unitários tangentes à trajetória da partícula em P e P' . Quando ambos são traçados a partir da mesma origem, $\Delta\vec{e}_t = \vec{e}'_t - \vec{e}_t$ e $\Delta\theta$ é o ângulo entre eles. Encontramos que a intensidade de $\Delta\vec{e}_t$ é:



$$\Delta e_t = 2 \sin(\Delta\theta/2)$$

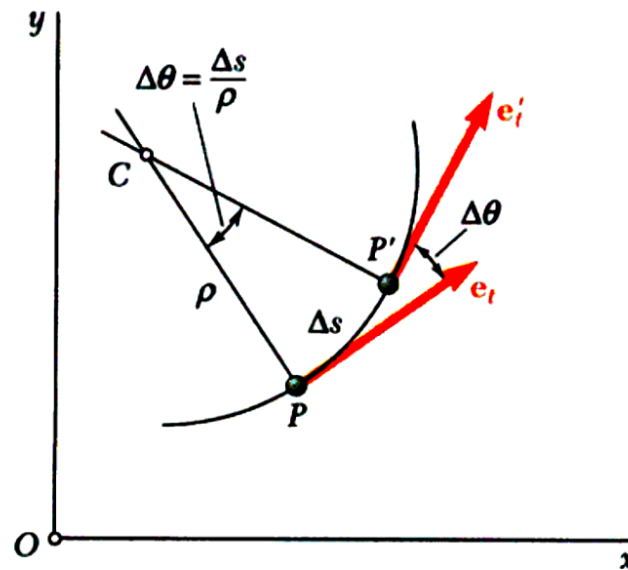
$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \vec{e}_n = \vec{e}_n$$

$$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}$$

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Tangencial e Normal

- Com o vetor velocidade expresso como $\vec{v} = v\vec{e}_t$, a aceleração da partícula pode ser escrita como:

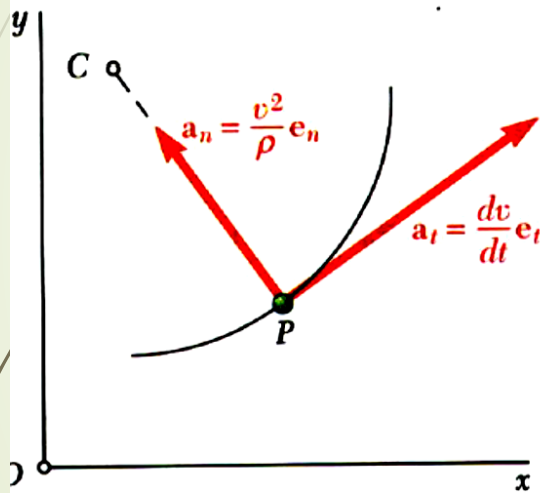


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Tangencial e Normal

Após as substituições temos,



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

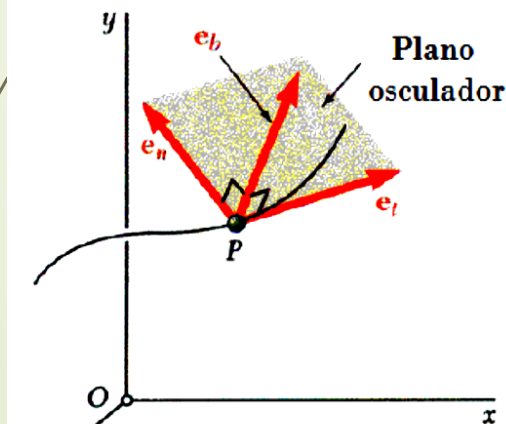
- O componente tangencial da aceleração reflete a variação na intensidade do vetor velocidade e o componente normal reflete as mudanças em sua direção.
- O componente tangencial pode ser positivo ou negativo. O componente normal sempre aponta para o centro da curvatura da trajetória.

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Tangencial e Normal

- As relações para as acelerações normal e tangencial também são válidas para uma partícula que se desloca ao longo de uma curva no espaço.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



- O plano que contém os vetores unitários tangencial e normal é chamado *plano osculador*.
- A Normal ao plano osculador é obtida a partir da relação

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

$\vec{e}_n = \text{normal principal}$

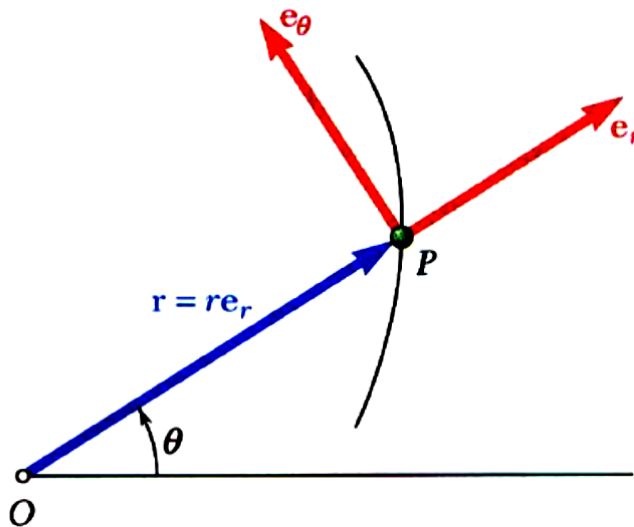
$\vec{e}_b = \text{binormal}$

- A aceleração não tem nenhum componente ao longo da binormal.

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Radial e Transversal

- Quando a posição de uma partícula é dada em coordenadas polares, é conveniente decompor a velocidade e a aceleração em componentes paralelo e perpendicular à linha OP .



$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

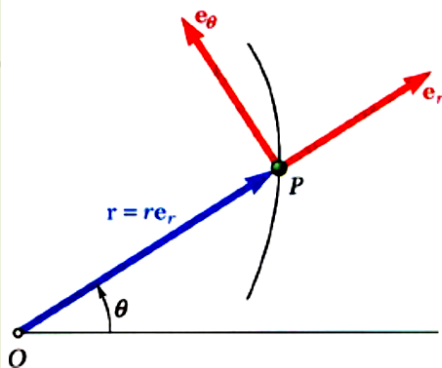
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Radial e Transversal

➤ Nesse caso, o vetor velocidade da partícula é

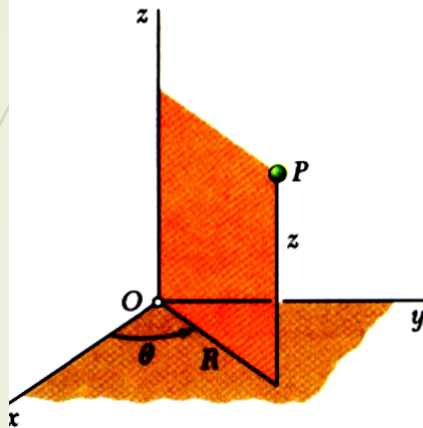

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

➤ De maneira análoga, a aceleração da partícula é

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Exemplo cinemático rotacional

Componentes Radial e Transversal

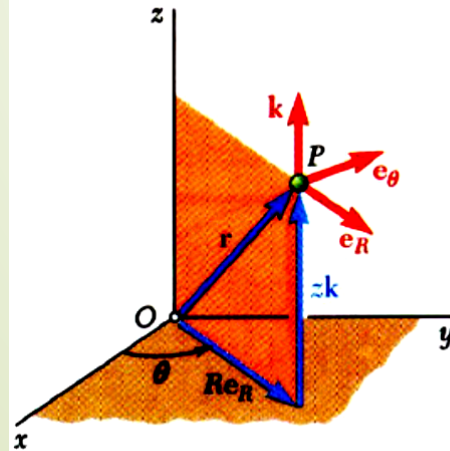


- Quando a posição de uma partícula é dada em coordenadas cilíndricas, é conveniente expressar sua velocidade e sua aceleração utilizando os vetores unitários $\vec{e}_R$, $\vec{e}_\theta$ e $\vec{k}$.

- Verificamos que, nesse caso, o vetor de posição é:
$$\vec{r} = R \vec{e}_R + z \vec{k}$$

- O vetor velocidade é:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R} \vec{e}_R + R \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k}$$



- E o vetor aceleração é:

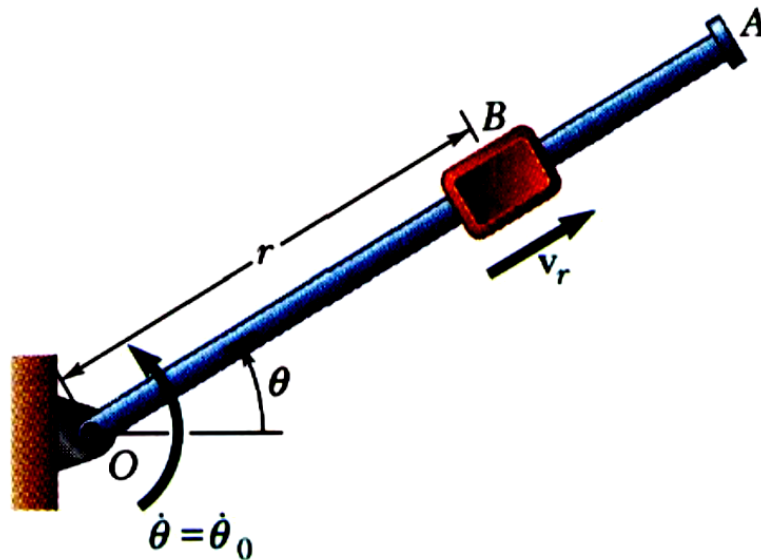
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{R} - R \dot{\theta}^2) \vec{e}_R + (R \ddot{\theta} + 2 \dot{R} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{k}$$

Exemplo cinemático rotacional

Um bloco B de massa m pode deslizar livremente sobre um braço OA sem atrito que gira em um plano horizontal a uma taxa constante $\dot{\theta}_0$.

Sabendo que B é lançado a uma distância r_0 de O , expressar como função de r :

- a) a componente v_r da velocidade de B ao longo OA e,
- b) o módulo da força horizontal exercida sobre B pelo braço OA.

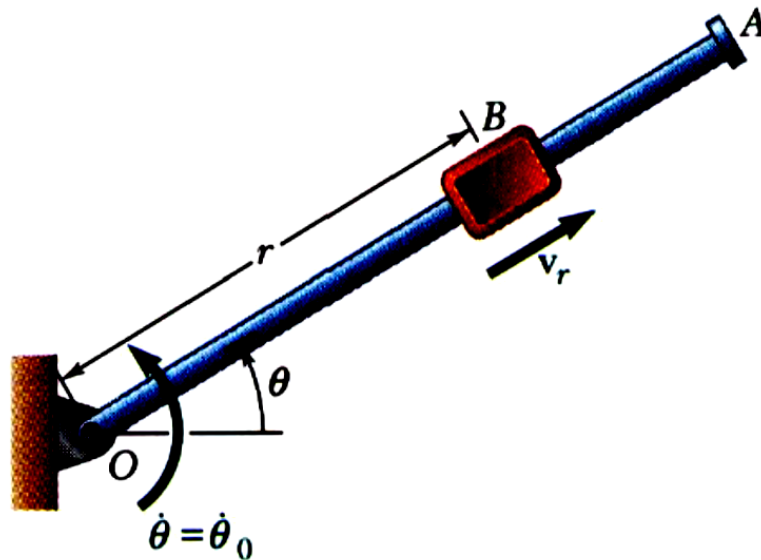


Exemplo cinemático rotacional

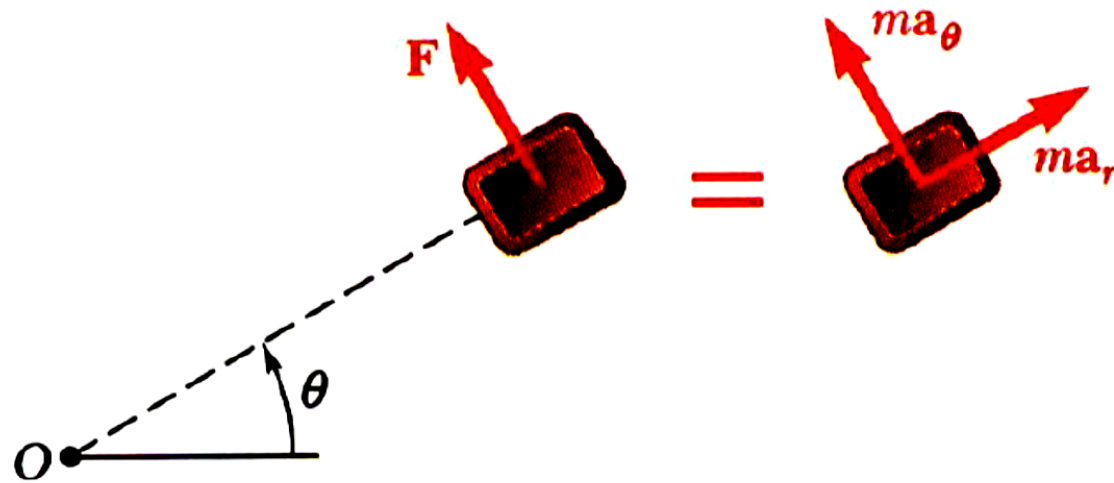
Um bloco B de massa m pode deslizar livremente sobre um braço OA sem atrito que gira em um plano horizontal a uma taxa constante $\dot{\theta}_0$.

Sabendo que B é lançado a uma distância r_0 de O , expressar como função de r :

- a) a componente v_r da velocidade de B ao longo OA e,
- b) o módulo da força horizontal exercida sobre B pelo braço OA.



Exemplo cinemático rotacional



SOLUÇÃO:

- Escreva as equações radial e transversal de movimento para o bloco.

$$\sum F_r = m a_r : \quad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\sum F_\theta = m a_\theta : \quad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Exemplo cinemático rotacional

- Integre a equação radial para encontrar uma expressão para a velocidade radial.

$$F_r \Rightarrow 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{r} = \dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr}$$

$$v_r dv_r = r\dot{\theta}^2 dr = r\dot{\theta}_0^2 dr$$

$$\int_0^{v_r} v_r dv_r = \dot{\theta}_0^2 \int_{r_0}^r r dr$$

$$\boxed{v_r^2 = \dot{\theta}_0^2 (r^2 - r_0^2)}$$

Exemplo cinemático rotacional

- Substitua as informações conhecidas na equação transversal para encontrar uma expressão para a força sobre o bloco.

$$F = 2m\theta_0^2 \left(r^2 - r_0^2 \right)^{1/2}$$