Mecânica Clássica

Equações de movimentos - Energia

Lucas Stori de Lara

Ponta Grossa, 03/2020

Introdução

- Equação fundamental da dinâmica: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

- Integrando: $\int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{I}$$

- *A* ***variação da quantidade de movimento*** *de uma partícula é igual ao* ***impulso****.*

Introdução

- Substituindo $\vec{p}$ por $m\vec{v}$, temos :

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{I} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m} I$$

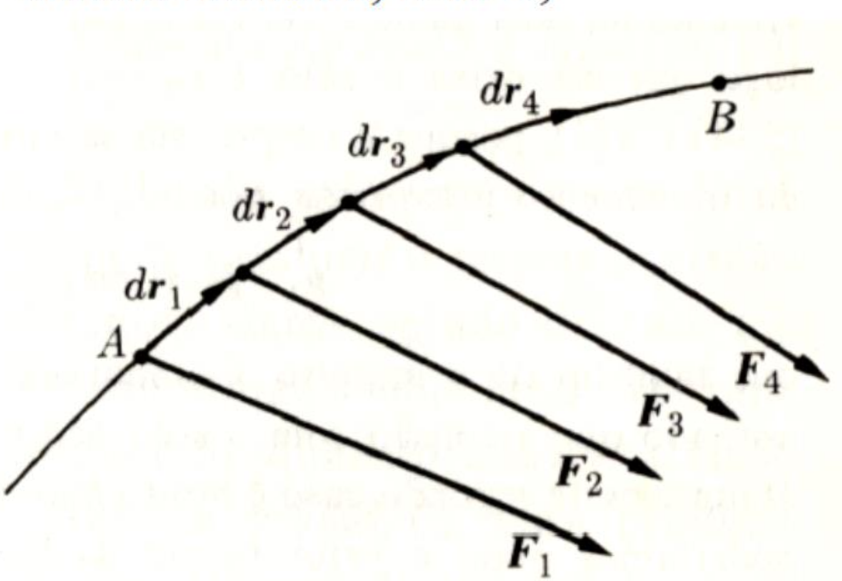
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

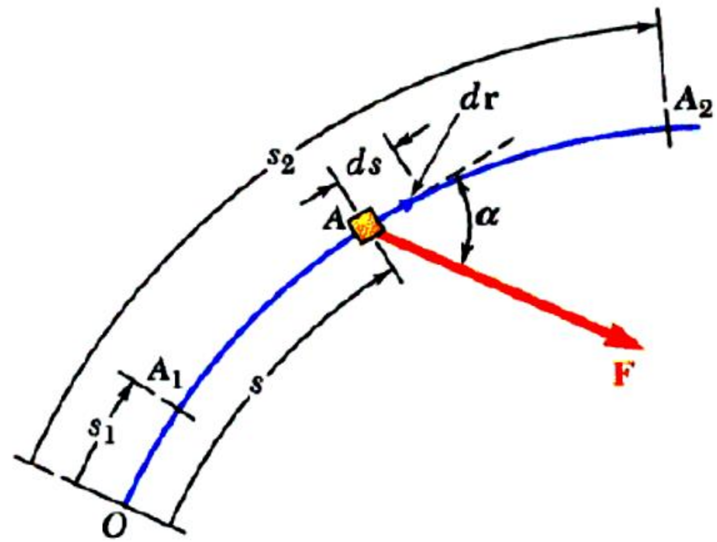
$$\int_{r_0}^{r} dr = \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{I})dt \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \vec{I} dt$$

- *Existem problemas em que a força* ***não*** *é conhecida como função do tempo, mas como função da posição. Nesse caso não podemos calcular a integral acima.*

Trabalho

- O trabalho total realizado sobre uma partícula, quando transportada de A para B é a soma de todos os trabalhos infinitesimais realizados durante os sucessivos deslocamentos infinitesimais, isto é,



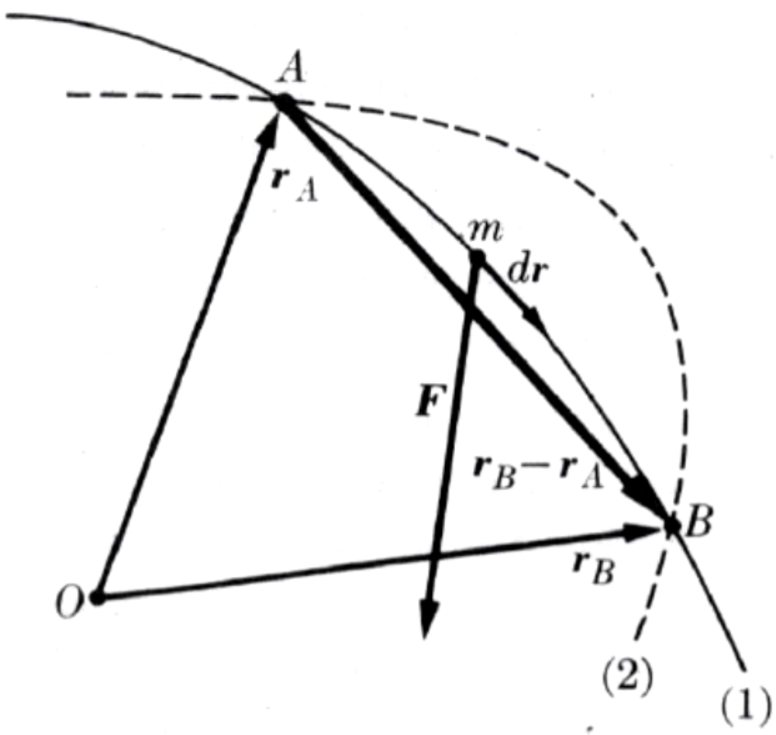


$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \dots$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_T ds.$$

Trabalho de uma Força Constante

- Consideremos uma partícula de massa m que se move sob ação de uma força **F** que é constante em módulo, direção e sentido.



Quando a partícula se move de A para B, ao longo da curva (1), o trabalho de **F** é

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r}$$

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

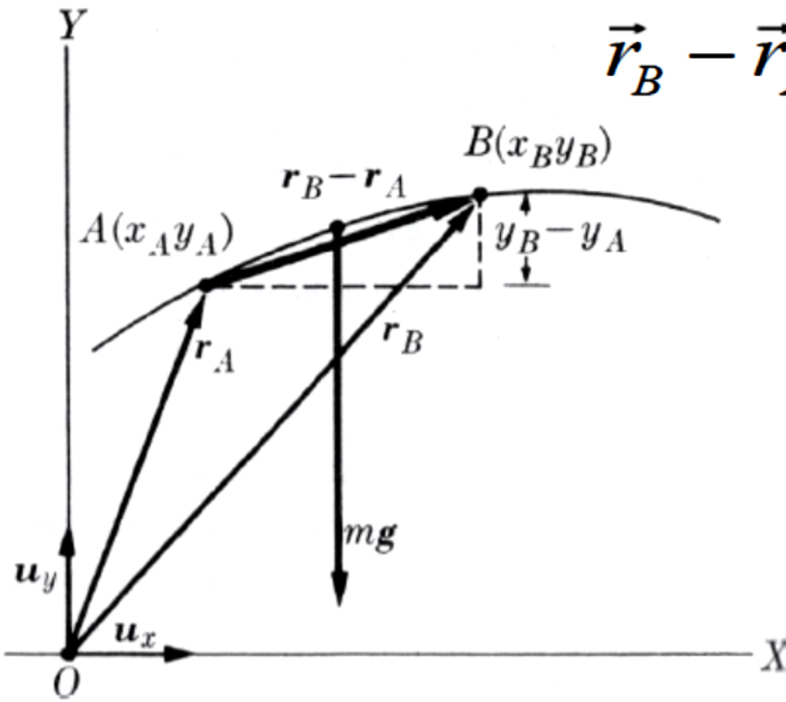
- O trabalho nesse caso é independente da trajetória que liga os pontos A e B. Se a partícula se mover pela curva (2), o trabalho será o mesmo.

Trabalho realizado pela Força Gravitacional

- Uma aplicação importante do trabalho de uma força constante é o trabalho realizado pela força da gravidade.

$$\vec{F} = m\vec{g} = -\vec{j}\ mg$$

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{i}\,(x_B - x_A) + \vec{j}\,(y_B - y_A)$$



$$W = -mg(y_B - y_A)$$

$$W = mgy_A - mgy_B$$

- O trabalho depende somente da diferença $Y_B - Y_A$.

Forças Conservativas

- Uma força é conservativa quando a sua dependência com o vetor-posição **r** ou com as coordenadas x, y, z da partícula é tal que o trabalho W pode ser sempre expresso como a diferença entre os valores de uma quantidade $E_p(x, y, z)$ nos pontos inicial e final.

- ***O trabalho realizado por forças conservativas é independente da trajetória.***

Energia Potencial

- A quantidade $E_p(x, y, z)$ é chamada energia potencial e é função das coordenadas da partícula. Então, se **F** é uma força conservativa.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B} = U_A - U_B$$

- A energia potencial é uma função das coordenadas tal que a diferença entre seus valores na posição inicial e na posição final é igual ao trabalho realizado sobre uma partícula para movê-la da posição inicial até a posição final.

$$W = -\Delta E_p = E_{p,inicial} - E_{p,final} = U_{inicial} - U_{final}$$

$$U = E_p = mgy + C$$

C= constante arbitrária.

Energia Potencial

- Quando um vetor é tal que sua componente em qualquer direção é igual à derivada direcional de uma função naquela direção, o vetor é dito *gradiente* da função. Assim dizemos que **F** é o negativo do gradiente de E_p

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\nabla E_p$$

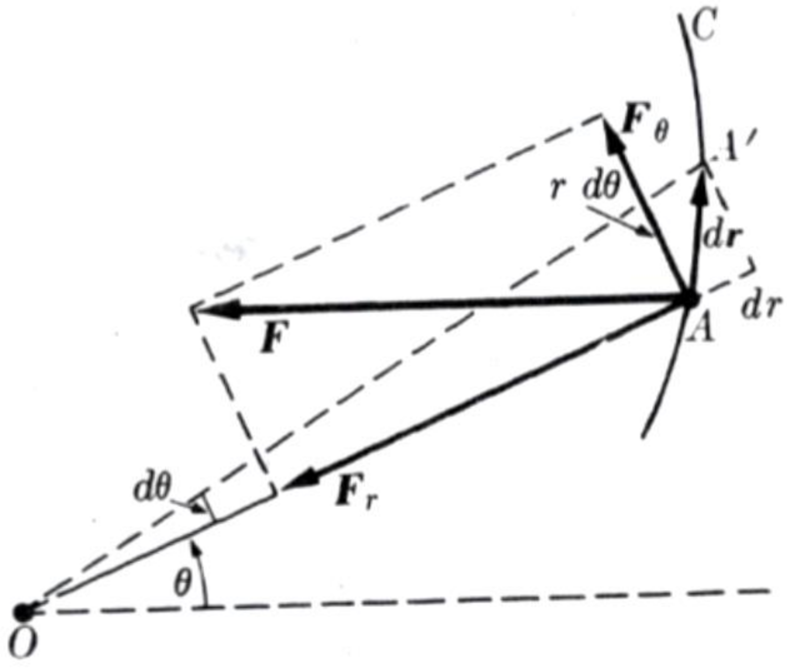
- Quando estamos interessados nas componentes retangulares de **F**, ao longo dos eixos x, y e z, $F\cos\theta$ torna-se F_x, F_y e F_z e o deslocamento *ds* fica *dx*, *dy* e *dz*, tal que

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad \text{ou}$$

$$\vec{F} = -grad\ E_p = -\vec{u}_x \frac{\partial E_p}{\partial x} - \vec{u}_y \frac{\partial E_p}{\partial y} - \vec{u}_z \frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Energia Potencial

- Se o movimento está contido num plano e são usadas as coordenadas r, θ, o deslocamento ao longo do raio vetor **r** é dr e o deslocamento perpendicular ao raio vetor é $rd\theta$. As componentes radial e transversal da força são



$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

Força Central

- Se a força é central existe somente componente radial e $F_\theta = 0$, resultando $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$, que implica na **não** dependência de E_p com θ. Como resultado, uma força central depende somente da distância da partícula ao centro.

- *A energia potencial associada a uma força central depende somente da distância da partícula ao centro de forças e, reciprocamente, a força associada com uma energia potencial que depende somente da distância da partícula a uma origem de forças é uma força central cuja linha de ação passa por essa origem.*

Força não é central

- Quando as forças não são centrais, há um torque em torno do ponto O, dado por $\tau = F_\theta r$, desde que a componente radial da força não contribui para o torque. O torque em torno de O é

$$F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta} \Rightarrow F_\theta r = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} \qquad \boxed{\tau = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta}}$$

- Essa expressão geral dá o torque numa direção perpendicular ao plano no qual o ângulo θ é medido.

- *Sempre que a energia potencial depende de um ângulo existe um torque aplicado ao sistema, resultando numa variação do momento angular em uma direção perpendicular ao plano do ângulo.*

Conservação da Energia Mecânica de uma Partícula

Quando a força que age sobre uma partícula é **conservativa**, podemos combinar as equações

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B} \quad \text{e} \quad W = E_{k,B} - E_{k,A}$$

que dá $$E_{p,A} - E_{p,B} = E_{k,B} - E_{k,A} \Rightarrow (E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B$$

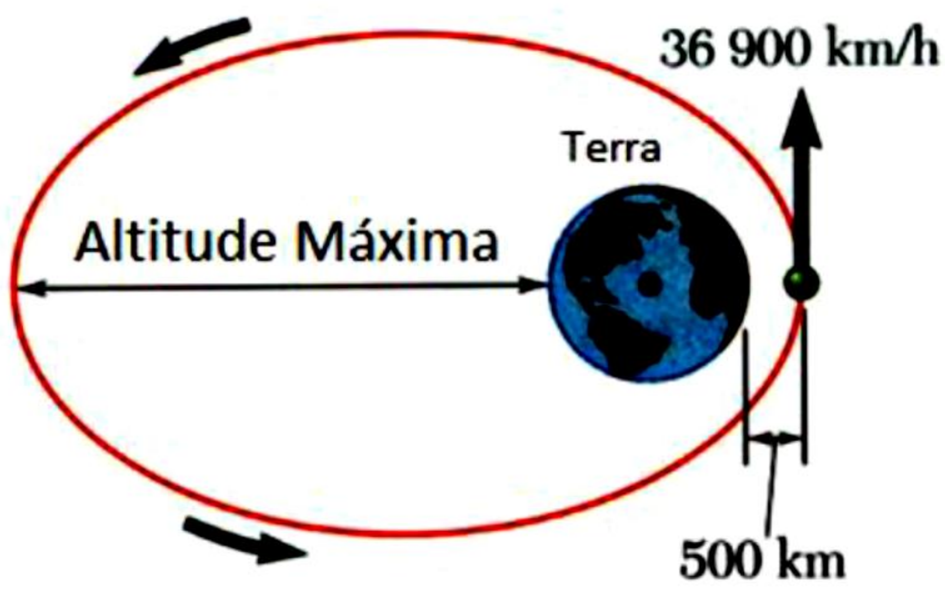
onde é chamada *energia total* da partícula.

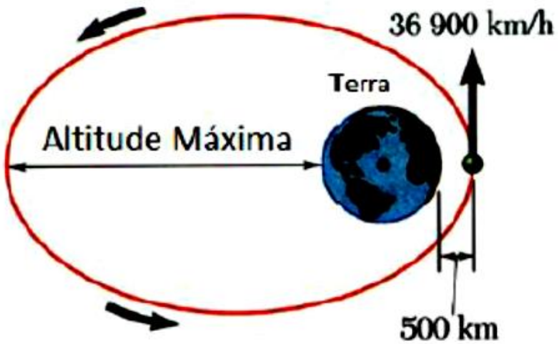
- *Quando as forças são conservativas, a energia mecânica total E da partícula permanece constante.*

$$\boxed{E = E_k + E_p = const.}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = const.}$$

Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 36.900 quilômetros por a hora de uma altitude de 500 km. Determine a altitude máxima atingida pelo satélite.





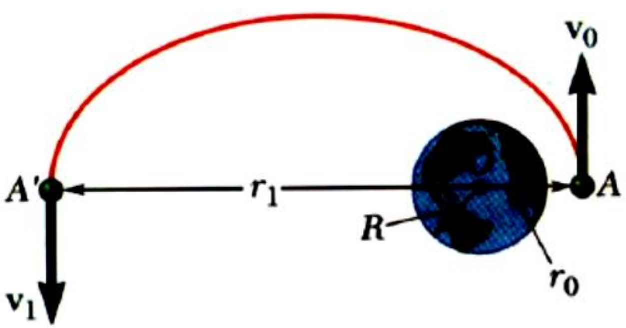
- Aplicar os princípios para os pontos de altitude mínima e máxima para determinar a altitude máxima.

Conservação de energia :

$$T_A + U_A = T_{A'} + U_{A'} \qquad \tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1}$$

Conservação da quantidade de movimento angular :

$$r_0 m v_0 = r_1 m v_1 \qquad v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1}$$



Combinando,

$$\tfrac{1}{2}v_0^2\left(1-\frac{r_0^2}{r_1^2}\right)=\frac{GM}{r_0}\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)$$

$$\left(1-\frac{r_0{}^2}{r_1{}^2}\right)=\frac{2GM}{r_0v_0{}^2}\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)$$

$$\left(1+\frac{r_0}{r_1}\right)\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)=\frac{2GM}{r_0v_0{}^2}\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)$$

$$1+\frac{r_0}{r_1}=\frac{2GM}{r_0v_0^2}$$

$$1+\frac{r_0}{r_1}=\frac{2GM}{r_0 v_0^2}$$

$$r_0 = 6370\,\text{km} + 500\,\text{km} = 6870\,\text{km}$$

$$v_0 = 36900\,\text{km/h} = 10.25\times 10^6\,\text{m/s}$$

$$GM = gR^2 = \left(9.81\,\text{m/s}^2\right)\left(6.37\times 10^6\,\text{m}\right)^2 = 398\times 10^{12}\,\text{m}^3/\text{s}^2$$

$$\boxed{r_1 = 60.4\times 10^6\,\text{m} = 60400\,\text{km}}$$

Mov. retilíneo sob ação de forças conservativas

No caso geral de um movimento retilíneo, a energia potencial depende apenas de uma coordenada, digamos x e podemos escrever:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_P(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left\{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Mov. retilíneo sob ação de forças conservativas

Podemos escrever essa equação numa forma em que as variáveis x e t são separadas, isto é, a variável x aparece de um lado da equação e a varável t aparece do outro lado. Podemos escrever

$$\frac{dx}{\left\{\frac{2}{m}\left[E-E_p(x)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}=dt$$

Integrando (e fazendo por $t_0 = 0$ por conveniência), temos

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\left\{\frac{2}{m}\left[E-E_p(x)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}=\int_0^t dt=t$$

- Use a equação anterior para resolver o problema do movimento retilíneo sob força constante.

Se a força **F** é constante, temos: $F_x = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow dE_p = -F dx$

$$E_p = -Fx + C$$

Considerando $E_p = 0$ para $x = 0$, resulta C = 0. Então

$\boxed{E_p = -Fx}$ é a expressão da energia potencial associada a uma força constante. Fazendo $x_0 = 0$, teremos

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} \int_0^x \frac{dx}{(E + Fx)^{\frac{1}{2}}} = t$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(E+Fx)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t \Rightarrow \frac{2}{F}(E+Fx)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{F}E^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t$$

Resolvendo para x, resulta $$x = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)t^2 + \left(\frac{2E}{m}\right)^{\frac{1}{2}} t$$

Como, $$\frac{F}{m} = a$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + Fx,\ \text{para } t = 0,\ x = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m}$$

Resulta

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$$