



Física Computacional

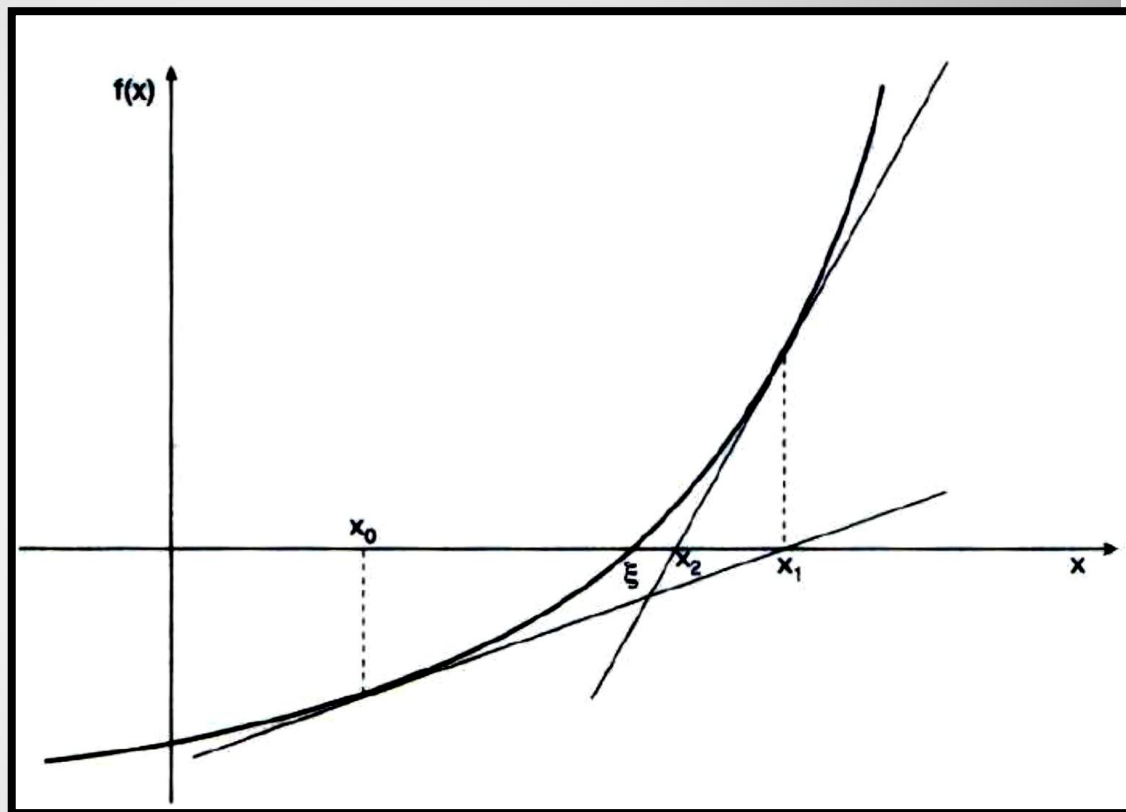
Cálculo Numérico
Método iterativo

Lucas Stori de Lara

Ponta Grossa, 03/2020

• Método Newton-Raphson

- É um método de convergência de função.
- Prenúncio do cálculo diferencial.
- Dado o ponto $(x_k, f(x_k))$, traçamos a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:



$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$



Para encontrar o zero neste modelo



$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

• Na verdade - Método Raphson-Newton

Joseph Raphson

a página principal | pédia, a enciclopédia livre.

Joseph Raphson (Middlesex, Inglaterra, c. 1648 — Inglaterra, ca. 1715) foi um matemático inglês. É conhecido pelo Método de Newton–Raphson.

Pouco é conhecido sobre sua vida, e mesmo as datas de seu nascimento e morte não são conhecidas, embora o historiador da matemática Florian Cajori tenha levantado as datas aproximadas 1648–1715. Raphson frequentou o Jesus College da Universidade de Cambridge, obtendo a graduação com o título de Master of Arts em 1692.^[1] Foi eleito fellow da Royal Society em 30 de novembro de 1689, após ter sido proposto como membro por Edmond Halley.

A obra mais notável de Raphson é *Analysis Aequationum Universalis*, que foi publicado em 1690. Contém um método, agora conhecido como Método de Newton-Raphson, para aproximar as raízes de uma equação. Isaac Newton já havia desenvolvido uma fórmula bem similar em seu *Method of Fluxions*, escrito em 1671, mas esta obra só foi publicada em 1736, aproximadamente 50 anos após a *Analysis* de Raphson. Contudo, a versão de Raphson do método é mais simples que a de Newton, e é portanto geralmente considerada superior. Por esta razão, é a versão de Raphson do método, e não a de Newton, que é encontrada nos livros texto atuais.

Raphson foi um firme defensor do crédito a Newton, e não a Gottfried Wilhelm Leibniz, como o único inventor do cálculo. Adicionalmente, Raphson traduziu a obra de Newton *Arithmetica Universalis* do latim para o inglês.

Raphson cunhou o termo panteísmo em sua obra *De Spatio Reali*, publicada em 1697,^[2] que pode ter sido encontrada por John Toland, que chamou o trabalho de Raphson "engenhoso".^[3]

Referências

- ↑ "Raphson, Joseph (RLF692J)". A Cambridge Alumni Database. University of Cambridge. (em inglês)
- ↑ Ann Thomson; *Bodies of Thought: Science, Religion, and the Soul in the Early Enlightenment*, 2008, página 54.
- ↑ *De Spatio Reali*

Joseph Raphson

Conhecido(a) por	Método de Newton-Raphson
Nascimento	ca. 1648 Middlesex, Inglaterra
Morte	ca. 1715 (67 anos) Inglaterra
Nacionalidade	 Inglês
Alma mater	Universidade de Cambridge
Campo(s)	Matemática

Joseph Raphson of Lincolns Inn
do gentes and agree to and with the President, Council,
and Fellows of the Royal Society of London for improving
Natural knowledge. That he being as I shall conceive a full
born of the said Society, I will pay to the Treasurer
of the said Society, for the sum being, in my Deputy, the
sum of Fifty two shillings per annum, by four equal Quar-
terly payments, on the four said days of payment, that is
on the first of the Month of our Lord, the first of
the Annunciation of the Blessed Virgin Mary, the first of
St. John Baptist, and the first of St. Michael the Archangel;
the full performance whereof I hereby do
solemnly and sincerely engage myself to perform, and
will cause the same to be performed, and I will pay in
proportion, viz. One shilling per week, for any better
time, after any the said days of payment, that I shall con-
stitute Fellows of the said Society. For the more perfect
relief of I bind me self and my Heirs in the penal laws
of common practice. In witness whereof I have hereunto set
my Hand and seal this fourth day of November 1688
One thousand six hundred eighty eight
Joseph Raphson

Signed and Delivered
in the Presence of
C. B. B. B.
1688

Compromisso assinado
por Joseph Raphson em sua
admissão na Royal Society

• Método Newton-Raphson

- Matematicamente falando
- Dada a equação $f(x)=0$ e partindo da forma geral para $\varphi(x)$, queremos obter a função $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi)=0$. ξ é a raiz

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x + A(x)f(x) \\ \varphi'(x) &= 1 + [A'(x)f(x) + A(x)f'(x)] \\ \varphi'(\xi) &= 1 + [A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi)]\end{aligned}$$

mas, $f(\xi)=0$, logo

$$\varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi).$$

Assim $\varphi'(\xi)=0$, temos

$$A(\xi) = [f'(\xi)]^{-1} \text{ ou ainda } A(x) = [f'(x)]^{-1}$$

- # Método Newton-Raphson

- Então, dada $f(x)$, a função de iteração

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ será tal que } \varphi'(\xi)=0$$

- Assim, generalizando para k iterações teremos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} :$$

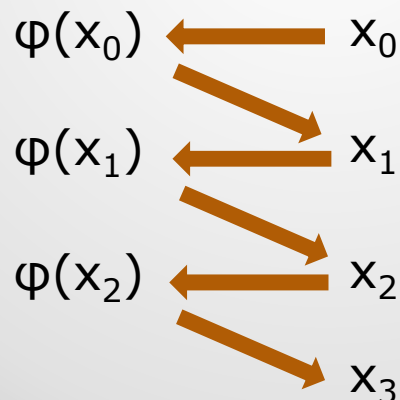
- Vejamos um exemplo aplicado à uma função $f(x)=x^2+x-6$
- Considere ainda que $x_0=1.5$.

• Método Newton-Raphson

- $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow = x - \frac{x^2+x-6}{2x+1}$

- Temos então:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1.5 \\x_1 &= \varphi(x_0) = 2.0625 \\x_2 &= \varphi(x_1) = 2.00076 \\x_3 &= \varphi(x_2) = 2.00000.\end{aligned}$$



Em geral, a eficiência do método está na escolha de x_0 de modo a estar próximo da raiz ξ

• Método Newton-Raphson

- Seja novamente a função do tipo $f(x)=x.\log(x) - 1$, sabendo que existe uma raiz no intervalo $[2,3]$.
- Considere $x_0=2.5$
- Compare o número de interações necessárias, considerando o método da bissecção, para que a raiz tenha 4 casas decimais precisas. Ou seja, as quatro casas decimais devem ser iguais nos dois métodos.

- Algoritmo que representaria o método proposto poderia ser dado como:

Seja a equação $f(x) = 0$.

Supor que estão satisfeitas as hipóteses do Teorema

1) Dados iniciais:

a) x_0 : aproximação inicial;

b) ϵ_1 e ϵ_2 : precisões

2) Se $|f(x_0)| < \epsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $k = 1$

$$4) \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

5) $\left. \begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \epsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \epsilon_2 \end{array} \right\} \text{ faça } \bar{x} = x_1. \text{ FIM.}$

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$

Volte ao passo 4.