Física Computacional

Cálculo Numérico
Método iterativo

Lucas Stori de Lara

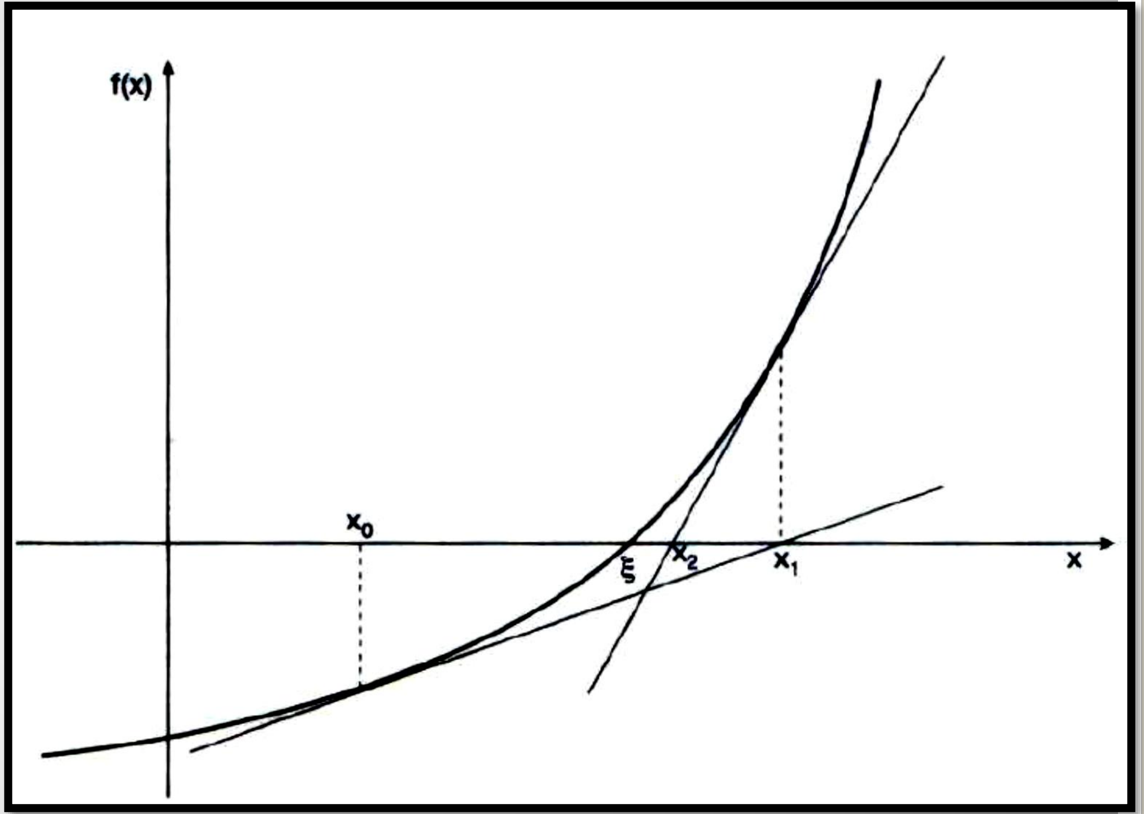
Ponta Grossa, 03/2020

Método Newton-Raphson

- É um método de convergência de função.

- Prenúncio do cálculo diferencial.

- Dado o ponto $(x_k, f(x_k))$, traçamos a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:



$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)\,(x - x_k).$$

Para encontrar o zero neste modelo

$$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Na verdade - Método Raphson-Newton

Joseph Raphson

a página principal pédia, a enciclopédia livre.

Joseph Raphson (Middlesex, Inglaterra, c. 1648 — Inglaterra, ca. 1715) foi um matemático inglês. É conhecido pelo Método de Newton–Raphson.

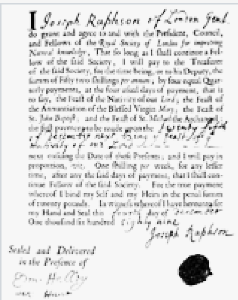
Pouco é conhecido sobre sua vida, e mesmo as datas de seu nascimento e morte não são conhecidas, embora o historiador da matemática Florian Cajori tenha levantado as datas aproximadas 1648–1715. Raphson frequentou o Jesus College da Universidade de Cambridge, obtendo a graduação com o título de Master of Arts em 1692.[1] Foi eleito fellow da Royal Society em 30 de novembro de 1689, após ter sido proposto como membro por Edmond Halley.

A obra mais notável de Raphson é *Analysis Aequationum Universalis*, que foi publicado em 1690. Contém um método, agora conhecido como Método de Newton-Raphson, para aproximar as raízes de uma equação. Isaac Newton já havia desenvolvido uma fórmula bem similar em seu *Method of Fluxions*, escrito em 1671, mas esta obra só foi publicada em 1736, aproximadamente 50 anos após a *Analysis* de Raphson. Contudo, a versão de Raphson do método é mais simples que a de Newton, e é portanto geralmente considerada superior. Por esta razão, é a versão de Raphson do método, e não a de Newton, que é encontrada nos livros texto atuais.

Raphson foi um firme defensor do crédito a Newton, e não a Gottfried Wilhelm Leibniz, como o único inventor do cálculo. Adicionalmente, Raphson traduziu a obra de Newton *Arithmetica Universalis* do latim para o inglês.

Raphson cunhou o termo panteísmo em sua obra *De Spatio Reali*, publicada em 1697,[2] que pode ter sido encontrada por John Toland, que chamou o trabalho de Raphson "engenhoso".[3]

Joseph Raphson	
Conhecido(a) por	Método de Newton-Raphson
Nascimento	ca. 1648 Middlesex, Inglaterra
Morte	ca. 1715 (67 anos) Inglaterra
Nacionalidade	Inglês
Alma mater	Universidade de Cambridge
Campo(s)	Matemática



Compromisso assinado por Joseph Raphson em sua admissão na Royal Society

Referências

1. ↑ "Ralphson, Joseph (RLF692J)". A Cambridge Alumni Database. University of Cambridge. (em inglês)
2. ↑ Ann Thomson; *Bodies of Thought: Science, Religion, and the Soul in the Early Enlightenment*, 2008, página 54.
3. ↑ *De Spatio Reali*

Método Newton-Raphson

- Matematicamente falando
- Dada a equação $f(x)=0$ e partindo da forma geral para $\varphi(x)$, queremos obter a função $A(x)$ tal que $\varphi'(\xi)=0$. ξ é a raiz

$$\varphi(x)=x+A(x)f(x)$$
$$\varphi'(x)=1+[A'(x)f(x)+A(x)f'(x)]$$
$$\varphi'(\xi)=1+[A'(\xi)f(\xi)+A(\xi)f'(\xi)]$$

mas, $f(\xi)=0$, logo

$$\varphi'(\xi)=1+A(\xi)f'(\xi).$$

Assim $\varphi'(\xi)=0$, temos

$$A(\xi)=[f'(\xi)]^{-1} \text{ ou ainda } A(x)=[f'(x)]^{-1}$$

Método Newton-Raphson

- Então, dada f(x), a função de iteração

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{será tal que } \varphi'(\xi)=0$$

- Assim, generalizando para k iterações teremos:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

- Vejamos um exemplo aplicado à uma função $f(x)=x^2+x-6$
- Considere ainda que $x_0=1.5$.

Método Newton-Raphson

- $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow = x - \dfrac{x^2+x-6}{2x+1}$
- Temos então:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5\\
x_1 &= \varphi(x_0) = 2.0625\\
x_2 &= \varphi(x_1) = 2.00076\\
x_3 &= \varphi(x_2) = 2.00000.
\end{aligned}
}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\varphi(x_0) & \longleftarrow & x_0 \\
 & \searrow & \\
\varphi(x_1) & \longleftarrow & x_1 \\
 & \searrow & \\
\varphi(x_2) & \longleftarrow & x_2 \\
 & \searrow & \\
 & & x_3
\end{array}
$$

Em geral, a eficiência do método está na escolha de x_0 de modo a estar próximo da raiz ξ

- Método Newton-Raphson

- Seja novamente a função do tipo f(x)=x.log(x) – 1, sabendo que existe uma raiz no intervalo [2,3].

- Considere $x_0=2.5$

- Compare o número de interações necessárias, considerando o método da bissecção, para que a raiz tenha 4 casas decimais precisas. Ou seja, as quatro casas decimais devem ser iguais nos dois métodos.

- Algoritmo que representaria o método proposto poderia ser dado como:

Seja a equação $f(x) = 0$.

Supor que estão satisfeitas as hipóteses do Teorema

1) Dados iniciais:

   a) x_0: aproximação inicial;

   b) ε_1 e ε_2: precisões

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $k = 1$

4) $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

5) $$\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \varepsilon_2 \end{array}\right] \text{ faça } \bar{x} = x_1\text{. FIM.}$$

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$
   Volte ao passo 4.