

## PRINCÍPIO DE HAMILTON – DINÂMICA LAGRANGEANA E HAMILTONIANA

### 7.1 INTRODUÇÃO

A experiência tem mostrado que o movimento de uma partícula num sistema de referência inercial é corretamente descrito pela equação Newtoniana  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ . Se a partícula não é forçada a se mover de alguma maneira complicada e se coordenadas retangulares são usadas para descrever o movimento, então usualmente as equações de movimento são relativamente simples. Mas se qualquer destas restrições for removida, a equação pode tornar-se bastante complexa e difícil de manipular. Por exemplo, se a partícula é forçada para mover-se na superfície de uma esfera, a equação de movimento resulta da projeção vetorial da equação Newtoniana sobre esta superfície. A representação da aceleração vetorial em coordenadas esféricas é uma expressão formidável, como o leitor que trabalhou o Problema 1-25 pode facilmente comprovar.

Além disso, quando uma partícula é forçada a se mover sobre dada superfície, certas forças devem existir (chamadas forças de vínculo) que mantém a partícula em contato com tal superfície. Para uma partícula movendo-se sobre uma superfície horizontal lisa, uma força de vínculo é simplesmente  $\mathbf{F}_c = -mg$ . Mas, se a partícula considerada agora é uma gota escorregando num um fio curvo, a força de vínculo pode ser bastante complicada. Na verdade, em certas situações pode ser difícil ou até mesmo impossível obter explicitamente expressões para forças de vínculo. Mas resolvendo o problema usando o procedimento Newtoniano, devemos conhecer todas as forças, porque a grandeza  $\mathbf{F}$  que aparece na equação fundamental é a força total que age no corpo.

Para evitar algumas das dificuldades práticas que surgem nas tentativas de aplicar as equações de Newton para problemas particulares, procedimentos alternativos podem ser desenvolvidos. Todas as aproximações são em essência uma *posteriori* (que se observa após o fato consumado ou por indução), porque sabemos de antemão que um resultado equivalente às equações Newtonianas deve ser obtido. Assim para efeito de simplificação, não precisamos formular uma *nova* teoria para mecânica—a teoria Newtoniana é bastante correta—mas só desenvolver um método alternativo para lidar com problemas complicados de uma maneira geral. Tal método está contido no **Princípio Hamiltoniano**, e as equações de movimento resultantes da aplicação deste princípio são chamadas de **equações de Lagrange**.

Se as equações de Lagrange são constituídas para descrever apropriadamente a dinâmica de partículas, elas devem ser equivalentes as equações Newtonianas. Por outro lado, o Princípio de Hamilton pode ser aplicado para um amplo intervalo de fenômenos físicos (particularmente aqueles envolvendo *campos*) em que usualmente não são associados com equações Newtonianas. Para ser correto, cada um dos resultados que podem ser obtidos pelo Princípio de Hamilton foi *primeiro* obtido, como foram as equações de Newton, pela correlação dos fatos experimentais. O Princípio de Hamilton não nos forneceu nenhuma nova teoria física, mas ela nos deixou uma unificação satisfatória de muitas teorias individuais por um único postulado básico. Isto não é um exercício

sem base na percepção baseada na observação do passado, porque isto é o objetivo da teoria física não somente para dar precisão à formulação matemática para um fenômeno observado, mas também para descrever estas ações com uma economia de postulados fundamentais e numa maneira mais unificada possível. Realmente, o Princípio de Hamilton é um dos mais elegantes e de maior abrangência dos princípios da teoria da física.

Na visão deste amplo alcance de aplicabilidade (mesmo que isto seja uma descoberta após o fato ter ocorrido), não é irracional afirmar que o Princípio de Hamilton é mais “fundamental” do que as equações Newtonianas. Portanto, procedemos primeiro postulando o Princípio de Hamilton; então obtemos as equações de Lagrange e mostramos que estas são equivalentes as equações Newtonianas.

Como já discutimos (nos Capítulos 2, 3 e 4) fenômenos dissipativos por um longo período, de agora em diante restringiremos nossa atenção em sistemas conservativos. Conseqüentemente, não faremos a discussão mais geral das equações de Lagrange, as quais levam em consideração os efeitos das forças não conservativas. O leitor deve recorrer a literatura para estes detalhes\*.

## 7.2 PRINCÍPIO DE HAMILTON

O princípio da mínima ação na física tem uma longa e interessante história. A procura por tal princípio é baseada na na idéia que a natureza sempre minimiza certas quantidades importantes quando ocorre um processo físico. O primeiro de tais princípios de mínima ação foi desenvolvido no campo da óptica. Hero da Alexandria, no segundo século A.C., estabeleceu que a lei que governa a reflexão da luz podia ser obtida pela afirmação que um raio de luz, viajando de um ponto para outro de uma reflexão de um espelho plano, sempre toma a menor trajetória possível. Uma simples construção geométrica verifica que este princípio de mínima ação realmente leva para a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão para um raio de luz que reflete num espelho plano. O Princípio de Hero da *menor trajetória* não pode, contudo, fornecer uma lei correta para a refração. Em 1657, Fermat reformulou o princípio postulando que um raio de luz sempre viaja de um ponto para outro num meio por uma trajetória que requer o mínimo de tempo.<sup>†</sup> O Princípio de Fermat do *mínimo tempo* leva imediatamente, não só para a lei correta da reflexão, mas também para a lei de Snell da refração (olhe o Problema 6-7).<sup>‡</sup>

Os Princípios da mínima ação continuaram a serem procurados, e na parte final do século dezessete o começo do cálculo de variações foi desenvolvido por Newton, Leibniz, e o Bernoulli quando problemas como a braquistócrona (olhe o Exemplo 6.2) e a forma de uma corda suspensa (uma catenária) foram resolvidos.

A primeira das aplicações de um princípio geral da mínima ação na mecânica foi feita em 1747 por Maupertuis, que afirmou que a dinâmica do movimento ocorre com a mínima ação.<sup>§</sup> O **princípio da mínima ação** de Maupertuis foi baseado no campo teológico (ação é minimizada através da “sabedoria de Deus”), e seu conceito de “ação” era bastante vago. (Recorde que a ação é uma grandeza com dimensões de *comprimento*  $\times$  *momento ou energia*  $\times$  *tempo*.) Somente mais tarde um sólido fundamento matemático do princípio foi fornecido por Lagrange (1760). Embora isto seja uma forma útil da qual fez a transição da mecânica clássica para óptica e para mecânica quântica, o princípio da mínima ação é menos geral que o Princípio de Hamilton e, realmente, pode ser derivada desse. Passaremos sem discutir os detalhes aqui<sup>¶</sup>.

Em 1828, Gauss desenvolveu um método de tratamento mecânico pelo seu princípio de **mínimo vínculo**; uma modificação foi feita mais tarde por Hertz e reuniu em seu princípio de **menor curvatura**. Estes princípios<sup>||</sup> foram atentamente relatados pelo Princípio de Hamilton e nada acrescenta para a satisfatória formulação geral de Hamilton; suas referências só enfatizam o contínuo interesse com princípios de mínima ação na física.

\*Olhe, por exemplo, Goldstein (Go80, Capítulo 2) ou, para uma compreensiva discussão, Whittaker (Wh37, Capítulo 8).

<sup>†</sup>Pierre de Fermat (1601-1665), um advogado francês, lingüista e matemático amador.

<sup>‡</sup>Em 1661, Fermat corretamente deduziu a lei da refração, qual tinha sido descoberta experimentalmente por volta de 1661 por Willebrord Snell (1591-1626), um holandês matemático prodígio.

<sup>§</sup>Pierre-Louis-Moreau de Maupertuis (1698-1759) matemático francês e astrônomo. O primeiro uso para qual Maupertuis colocou o princípio da menor ação era TORESTATE derivação de Fermat da lei da refração(1744).

<sup>¶</sup>Olhe, por exemplo, Goldstein (Go80, pág. 365-371) ou Sommerfeld (So50, pág. 204-209).

<sup>||</sup>Olhe, por exemplo, Linsay e Margenau (Li36, pg 112-120) ou Sommerfeld (So 50, pág. 210-214).

Em dois artigos publicados em 1834 e 1835, Hamilton\* anunciou o princípio dinâmico sobre qual ele é a possível base para toda a mecânica e, além disso, para toda a física clássica. O Princípio de Hamilton pode ser declarado como segue†:

*Para todas as possíveis trajetórias ao longo das quais o sistema dinâmico pode se mover de um ponto para outro dentro de um intervalo de tempo específico (compatível com algum vínculo), a real trajetória seguida é a que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinética e potencial.*

Em termos do cálculo de variações, o Princípio de Hamilton se torna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (7.1)$$

onde o símbolo  $\delta$  é uma notação abreviada para descrever a variação discutida na Seções 6.3 e 6.7. Este procedimento variacional do princípio requer somente que a integral de  $T - U$  seja um extremo, não necessariamente um mínimo. Mas em quase todas aplicações importantes em dinâmica, acontece a condição de mínimo.

A energia cinética de uma partícula expressa de maneira pré-determinado, coordenadas retangulares é uma função somente de  $\dot{x}_i$  e se a partícula se mover num campo de forças conservativas, a energia potencial é uma função somente de  $x_i$ :

$$T = T(\dot{x}_i), \quad U = U(x_i)$$

Se definirmos a diferença destas quantidades como sendo

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i) \quad (7.2)$$

então a Equação 7.1 se torna

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0 \quad (7.3)$$

A função  $L$  que aparece nesta expressão pode ser identificada com a função  $f$  da integral do princípio variacional (veja Seção 6.5),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f\{y_i(x), y'_i(x); x\} dx$$

Se fizermos as transformações

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow t \\ y_i(x) &\longrightarrow x_i(t) \\ y'_i(x) &\longrightarrow \dot{x}_i(t) \\ f\{y_i(x), y'_i(x); x\} &\longrightarrow L\{x_i, \dot{x}_i\} \end{aligned}$$

As equações de Euler-Lagrange (Equação 6.57) correspondente a Equação 7.3 são então

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \text{Equações de movimento de Lagrange} \quad (7.4)$$

Estas são as **equações de movimento de Lagrange** para a partícula, e a quantidade  $L$  é chamada de **função de Lagrange** ou **Lagrangeana**‡ para a partícula.

\*Senhor William Rowan Hamilton (1805-1865) matemático escocês e astrônomo, e depois, Astrônomo Real Irlandês.

†O significado geral de “a trajetória do sistema” é feita claramente na Seção 7.3.

‡N.E.: em alguns livros e artigos é também encontrado *lagrangeano* no lugar de *lagrangeana*. Optamos pelo último por se tratar de uma *função de Lagrange*.

Por intermédio de exemplo, vamos obter a equação de Lagrange de movimento para o oscilador harmônico unidimensional. Com as expressões habituais para as energias cinética e potencial, temos

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

Substituindo estes resultados na Equação 7.4 obtemos

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

que é idêntica a equação de movimento que obtivemos usando mecânica Newtoniana.

O procedimento Lagrangeano parece bastante complicado se ele somente reproduz os resultados simples de teoria Newtoniana. Porém, vamos continuar ilustrando o método considerando o pêndulo plano (veja Seção 4.4). Usando Equação 4.23 para  $T$  e  $U$ , temos, para a função de Lagrange

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

Agora trataremos  $\theta$  como se fosse uma coordenada retangular e apliquemos as operações especificadas na Equação 7.4; obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

que é novamente idêntica com o resultado Newtoniano (Equação 4.21). Este é um resultado notável; foi obtido calculando as energias cinética e potencial em termos de  $\theta$  em lugar de  $x$  e aplicando um conjunto de operações projetado para uso com coordenadas retangulares no lugar de coordenadas angulares. Somos levados a suspeitar então que as equações de Lagrange são mais gerais que a forma de Equação 7.4 indicaria. Encontraremos este assunto na Seção 7.4.

Outra característica importante do método usado nos dois exemplos simples anteriores é que em nenhuma parte nos cálculos ocorreu uma declaração qualquer relativa a *força*. As equações de movimento foram obtidas especificando somente certas propriedades associadas com a *partícula* (as energias cinética e potencial), e sem a necessidade de levar em conta explicitamente que havia um agente externo *agindo na partícula* (a força). Então, a *energia* pode ser definida independentemente dos conceitos Newtonianos. O Princípio de Hamilton nos permite calcular as equações de movimento de um corpo completamente sem recorrermos a teoria Newtoniana. Voltaremos a este ponto importante nas Seções 7.5 e 7.7.

### 7.3 COORDENADAS GENERALIZADAS

A partir de agora buscaremos tirar proveito da flexibilidade na especificação das coordenadas, como sugerem os dois exemplos da seção anterior, fato que é inerente nas equações de Lagrange.

Consideramos um sistema mecânico geral que consiste em uma coleção de  $n$  pontos de partículas discretas, algumas das quais podem ser conectadas para formar corpos rígidos. Discutiremos tais sistemas de partículas no Capítulo 9 e corpos rígidos no Capítulo 11. Para especificar o estado de um dado sistema em um determinado momento, é necessário usar  $n$  raios vetor. Como cada raio vetor consiste de três números (por exemplo, as coordenadas retangulares),  $3n$

quantidades devem ser especificadas para descrever as posições de todas as partículas. Se existem equações de restrição (ou de vínculo) que relacionam algumas destas coordenadas com outras (como seria o caso, por exemplo, se algumas das partículas fossem conectadas para formar corpos rígidos ou se o movimento fosse restringido para ocorrer ao longo de algum caminho ou em alguma superfície), então nem todas as  $3n$  coordenadas são independentes. Na realidade, se há  $m$  equações de vínculo, então  $3n - m$  coordenadas são independentes, e o sistema é dito possuir  $3n - m$  graus de liberdade.

É importante observar que se  $s = 3n - m$  coordenadas são necessárias num dado caso, não precisamos escolher  $s$  coordenadas retangulares ou  $s$  coordenadas curvilíneas (por exemplo, esférica, cilíndrica). Podemos escolher quaisquer  $s$  parâmetros independentes, contanto que eles especifiquem o estado do sistema completamente. Estas  $s$  quantidades não precisam ter as dimensões de comprimento. Dependendo da disponibilidade do problema, pode-se provar que é mais conveniente escolher alguns dos parâmetros com dimensões de *energia*, alguns com dimensões de (*comprimento*)<sup>2</sup>, e alguns são *adimensionais*, e assim sucessivamente. No Exemplo 6.5, descrevemos um disco que rola num plano inclinado em termos de uma coordenada que era: um comprimento e uma que era um ângulo. Damos o nome de **coordenadas generalizadas** para qualquer conjunto de quantidades que especifiquem totalmente o estado de um sistema. As coordenadas generalizadas são usualmente escritas como  $q_1, q_2, \dots$ , ou simplesmente como  $q_j$ . Um conjunto de coordenadas generalizadas independentes cujo número é igual ao número  $s$  de graus de liberdade do sistema e não restrito pelos vínculos é chamado de um conjunto *próprio* de coordenadas generalizadas. Em certos exemplos, pode ser vantajoso usar coordenadas generalizadas cujo número exceda o número de graus de liberdade e para levar em conta as relações de vínculo explicitamente pelo uso dos multiplicadores de Lagrange indeterminados. Por exemplo, seria o caso se desejamos calcular as forças de vínculo (veja Exemplo 7.8).

A escolha de um conjunto de coordenadas generalizadas para descrever um sistema não é sempre igual; há em geral muitos conjuntos de quantidades (na realidade, é um número infinito!) que especifica completamente o estado de um determinado sistema. Por exemplo, no problema do disco rolando plano inclinado abaixo, talvez possamos escolher como coordenadas, a altura do centro de massa do disco em relação a um nível de referência e a distância pela qual algum ponto sobre o aro se moveu desde o começo do movimento. O teste final de “conveniência ou não” de um conjunto particular de coordenadas generalizadas é saber se as equações resultantes de movimento são suficientemente simples para permitir uma interpretação fácil. Infelizmente, não podemos estabelecer regras gerais para selecionar o conjunto mais apropriado de coordenadas generalizadas para um dado problema. Uma certa habilidade deve ser desenvolvida através da experiência.

Além das coordenadas generalizadas, podemos definir um conjunto de quantidades constituintes das derivadas em relação ao tempo de  $q_j : \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ , ou simplesmente  $\dot{q}_j$ . Em analogia com a nomenclatura para coordenadas retangulares, chamamos  $\dot{q}_j$  de as **velocidades generalizadas**.

Se permitirmos a possibilidade de que as equações que conectam  $x_{\alpha,i}$  e  $q_j$  contém explicitamente o tempo, então o conjunto de transformações de equações é dado por\*

$$\begin{aligned} x_{\alpha,i} &= x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t), & \begin{cases} \alpha = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \\ &= x_{\alpha,i}(q_j, t), & j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (7.5)$$

Em geral, os componentes retangulares das velocidades dependem das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo:

$$\dot{x}_{\alpha,j} = \dot{x}_{\alpha,j}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (7.6)$$

Também podemos descrever as transformações inversas como:

$$q_j = q_j(x_{\alpha,i}, t) \quad (7.7)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) \quad (7.8)$$

Há, também,  $m = 3n - s$  equações de vínculo da forma

$$f_k(x_{\alpha,i}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7.9)$$

\*Neste capítulo, tentamos simplificar a notação reservando o subscrito  $i$  para os eixos retangulares; portanto, sempre temos  $i = 1, 2, 3$ .

**EXEMPLO 7.1** .....

**Encontre um conjunto apropriado de coordenadas generalizadas para calcular o ponto de movimento de uma partícula sobre a superfície de um hemisfério de raio  $R$ , cujo centro está na origem. Solução:** como o movimento sempre ocorre na superfície, temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, z \geq 0 \quad (7.10)$$

Vamos escolher como nossas coordenadas generalizadas os cossenos dos ângulos entre os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e a linha que conecta a partícula com a origem. Portanto,

$$q_1 = \frac{x}{R}, \quad q_2 = \frac{y}{R}, \quad q_3 = \frac{z}{R} \quad (7.11)$$

Mas a soma dos quadrados dos cossenos diretores de uma linha é igual a unidade. Por esta razão,

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (7.12)$$

Esse conjunto de  $q_j$  não constitui um conjunto próprio de coordenadas generalizadas, pois podemos escrever  $q_3$  como função de  $q_1$  e  $q_2$ :

$$q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2} \quad (7.13)$$

Entretanto, podemos escolher  $q_1 = x/R$  e  $q_2 = y/R$  como coordenadas generalizadas próprias e essas quantidades, juntamente com a equação de vínculo (Equação 7.13)

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (7.14)$$

são suficientes para unicamente especificar a posição da partícula. Isso deveria ser um resultado óbvio, porque somente duas coordenadas (latitude e longitude, por exemplo) são necessárias para especificar um ponto na superfície de uma esfera. Mas o exemplo ilustra o fato de que as equações de vínculo sempre podem ser usadas para reduzir um provável conjunto de coordenadas para um conjunto próprio de coordenadas generalizadas.

..... **FIM DO EXEMPLO 7.1**

**EXEMPLO 7.2** .....

**Use o sistema de coordenadas  $(x, y)$  da figura 7.1 para encontrar a energia cinética  $T$ , a energia potencial  $U$ , e a Lagrangiana  $L$  para um simples pêndulo (comprimento  $l$ , massa de movimento (para cima e para baixo)  $m$ ), movimentando-se no plano  $x, y$ . Determine as equações de transformação do sistema retangular  $(x, y)$  para a coordenada  $\theta$ . Encontre a equação de movimento.**

**Solução:** Já examinamos esse problema geral nas Seções 4.4 e 7.1. Quando usamos o método Lagrangeano, geralmente é válido começar com as coordenadas retangulares e transformar para o sistema mais óbvio com as coordenadas generalizadas mais simples. Nesse caso, as energias cinética e potencial e a Lagrangeana tornam-se:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ U &= mgy \\ L &= T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \end{aligned}$$

A inspeção da Figura 7-1 revela que o movimento pode ser determinado pelo conhecimento de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Vamos transformar  $x$  e  $y$  na coordenada  $\theta$  e então encontrar  $L$ , em termos de  $\theta$ .

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \\ y &= -l \cos \theta \end{aligned}$$

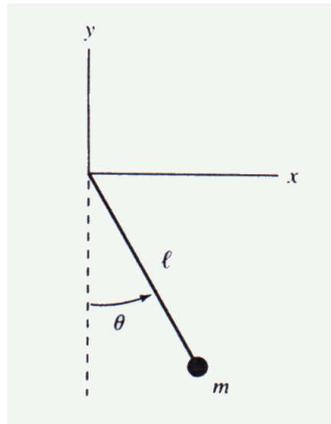


FIGURA 7-1

Encontramos agora por  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= l\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= l\dot{\theta} \sin \theta \\ L &= \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta\end{aligned}$$

A única coordenada generalizada, no caso do pêndulo, é o ângulo  $\theta$  e expressamos o Lagrangian em termos de  $\theta$ , seguindo um simples procedimento de encontrar  $L$  em termos de  $x$  e  $y$ , encontrando as equações de transformação e então inserindo-as na expressão para  $L$ . Se fizermos como fizemos na seção anterior e tratarmos  $q$  como se fosse uma coordenada retangular, podemos encontrar a equação de movimento como segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2\ddot{\theta}\end{aligned}$$

Inserimos essas relações na Equação 7.4 para encontrar a mesma equação de movimento, como encontramos anteriormente.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

..... **FIM DO EXEMPLO 7.2**

O estado do sistema constituído de  $n$  partículas e sujeito a  $m$  vínculos que conectam algumas das  $3n$  coordenadas retangulares é completamente especificado por  $s = 3n - m$  coordenadas generalizadas. Podemos representar o estado de tal sistema por um ponto no espaço  $s$ -dimensional chamado **espaço de configurações**. Cada dimensão deste espaço corresponde a uma coordenada das  $q_j$  coordenadas. Podemos representar a evolução através do tempo do sistema por uma curva no espaço de configurações, onde cada ponto representa a *configuração* do sistema em um determinado instante. Por cada um desses pontos passa um número infinito de curvas representando os possíveis movimentos do sistema; cada curva corresponde a um conjunto particular de condições iniciais. Podemos, então, falar do “caminho” de um sistema como ele “desloca” através do espaço de configurações. Mas devemos ter cuidado para não confundir esta terminologia com a aplicada ao movimento de uma partícula sobre uma trajetória no espaço tridimensional ordinário .

Devemos perceber também que uma trajetória no espaço de configuração consistindo de coordenadas generalizadas próprias é automaticamente consistente com os vínculos sobre o sistema, porque as coordenadas são escolhidas para corresponder somente com os movimentos possíveis do sistema.

## 7.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE LAGRANGE EM COORDENADAS GENERALIZADAS

De acordo com as definições apresentadas nas seções precedentes, podemos reformular novamente o Princípio de Hamilton como segue:

*De todos os possíveis caminhos pelos quais pode passar um sistema dinâmico de um ponto a outro no espaço de configurações num certo intervalo tempo, o real caminho seguido é aquele que minimiza a integral temporal da função Lagrangeana do sistema.*

Para expressar o Princípio de Hamilton em coordenadas generalizadas na forma variacional, podemos usar uma importante propriedade Lagrangeana que ainda não enfatizamos. A Lagrangeana para um sistema é definida pela diferença entre as energias cinética e potencial. Mas *energia* é uma grandeza escalar e desta forma a *Lagrangeana é uma função escalar*. Conseqüentemente, a Lagrangeana deve ser *invariante frente as transformações de coordenadas*. Contudo, certas transformações que alteram a Lagrangeana, mas deixam as equações de movimento inalteradas, são permitidas. Por exemplo, equações de movimento são inalteradas se  $L$  é substituído por  $L + d/dt [f(q_i, t)]$  onde  $f(q_i, t)$  tem as segundas derivadas parciais contínuas. Desde que definimos a Lagrangeana como a diferença entre as energias cinética e potencial, podemos usar diferentes coordenadas generalizadas. (A Lagrangeana é, entretanto, indeterminada por uma constante aditiva na energia potencial  $U$ ). Portanto, é sem importância se expressamos a Lagrangeana em função de  $x_{\alpha,i}$  e  $\dot{x}_{\alpha,i}$  ou  $q_j$  e  $\dot{q}_j$ .

$$\begin{aligned} L &= T(\dot{x}_{\alpha,i}) - U(x_{\alpha,i}) \\ &= T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, t) \end{aligned} \quad (7.15)$$

isto é,

$$\begin{aligned} L &= L(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; t) \\ &= L(q_j, \dot{q}_j, t) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Assim, o Princípio de Hamilton fica

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Princípio de Hamilton} \quad (7.17)$$

Se utilizarmos as definições da Seção 6.5 e efetuarmos as identificações

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow t \\ y_i(x) &\longrightarrow q_j(t) \\ \dot{y}_i(x) &\longrightarrow \dot{q}_j(t) \\ f\{y_i, \dot{y}_i; x\} &\longrightarrow L(q_j, \dot{q}_j, t) \end{aligned}$$

então as equações de Euler (Equação 6.57) correspondendo para um problema variacional expresso na Equação 7.17 tornam-se

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s} \quad (7.18)$$

Estas são as equações de movimento de Euler-Lagrange (geralmente chamadas simplesmente de **equações de Lagrange\***). Existem  $s$  dessas equações e junto com as  $m$  equações de vínculo e as condições iniciais que são impostas, elas descrevem completamente o movimento do sistema\*.

É importante compreender que a validade das equações de Lagrange impõe que sejam cumpridas duas condições:

\*Deduzida pela primeira vez para um sistema mecânico (embora, claro, não mediante o Princípio de Hamilton) por Lagrange e apresentado na sua famosa obra *Mécanique analytique* em 1788. Neste monumental trabalho, que envolve todos os aspectos da mecânica (estática, dinâmica, hidrostática e hidrodinâmica), Lagrange situou a questão sobre uma base matemática firme e unificada. A natureza do tratado é mais matemática que física; Lagrange era profundamente orgulhoso pelo fato de todo seu trabalho não caber em uma só diagrama.

\*Por existir  $s$  equações diferenciais de segunda ordem, são necessárias  $2s$  condições iniciais para determinar o movimento univocamente.

1. As forças atuando sobre o sistema (à parte de qualquer força de vínculo) devem ser obtidas (derivadas) de um potencial (ou de vários potenciais).
2. As equações de vínculo devem ser relações que conectem as *coordenadas* da partícula e podem ser funções do tempo—sto é, podemos ter relações de vínculo da forma dada pela Equação 7.9.

Se os vínculos podem ser expressos como na condição 2, eles são chamados vínculos **holonômicos**<sup>†</sup>. Se as equações de vínculo não contêm explicitamente o tempo, os vínculos são ditos **fixos** ou **escleronômicos**; vínculos móveis são **reonômicos** (*rheonomic*).

Aqui consideramos somente o movimento de sistemas submetidos a forças conservativas. Tais forças podem sempre derivar de funções potenciais, assim a condição 1 é satisfeita. Esta condição não tem carácter restritivo tanto para o Princípio de Hamilton como para as equações de Lagrange; a teoria pode ser prontamente estendida para incluir forças não conservativas. Analogamente, podemos formular o Princípio de Hamilton de maneira que inclua certas classes de vínculos não holonômicos, mas o tratamento aqui é restrito para sistemas holonômicos.

Agora trabalharemos alguns exemplos usando as equações de Lagrange. A prática é o melhor modo para determinar o conjunto de coordenadas generalizadas, entender os vínculos, e montar a Lagrangiana. Uma vez que isto é feito, o restante da maior parte do problema é matemático.

**EXEMPLO 7.3** .....

**Considere o caso do movimento de um projétil sob ação da gravidade em duas dimensões como o discutido no Exemplo 2.6 .Ache as equações de movimento em coordenadas cartesianas e polares.**

**Solução:** Use a Figura 2-7 para descrever o sistema. Em coordenadas cartesianas, usamos  $x$  (horizontal) e  $y$  (vertical). Em coordenadas polares usamos  $r$  (na direção radial) e  $\theta$  (elevação angular na horizontal). Primeiro, em coordenadas cartesianas temos:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ U &= mgy \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

onde  $U = 0$  em  $y = 0$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \quad (7.20)$$

Encontramos as equações de movimento usando Equação 7.18:

$x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ 0 - \frac{d}{dt} m\dot{x} &= 0 \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

$y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 0 \\ -mg - \frac{d}{dt} (m\dot{y}) &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned} \quad (7.22)$$

Usando as condições iniciais, as Equações 7.21 e 7.22 podem ser integradas para determinar as equações apropriadas do movimento.

<sup>†</sup>N.E.: é também chamado de vínculos *holônomo*s.

Em coordenadas polares, temos

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2$$

$$U = mgr \sin \theta$$

onde  $U = 0$  para  $\theta = 0$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr \sin \theta \tag{7.23}$$

$r$ :

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$mr\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta - \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = 0$$

$$r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta - \ddot{r} = 0 \tag{7.24}$$

$\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$-mgr \cos \theta - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$-gr \cos \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta} = 0 \tag{7.25}$$

As equações de movimento expressas pelas Equações 7.21 e 7.22 são evidentemente mais simples do que as Equações 7.24 e 7.25. Devemos optar pelo sistema de coordenadas Cartesianas como coordenadas generalizadas para resolver este problema. A chave para o reconhecimento disto foi que a energia potencial do sistema somente depende da coordenada na direção  $y$ . Em coordenadas polares, a energia potencial depende tanto de  $r$  como de  $\theta$ .

FIM DO EXEMPLO 7.3

**EXEMPLO 7.4** .....

Uma partícula de massa  $m$  é forçada a movimentar-se sobre uma superfície em forma de cone, sem atrito, de um ângulo de inclinação  $\alpha$  (veja Figura 7-2). A partícula está sujeita a força gravitacional. Determine um conjunto de coordenadas generalizadas e determine os vínculos. Ache as equações de Lagrange para o movimento, Equação 7.18.

**Solução:** Fazemos o eixo do cone coincidir com o eixo  $z$  e a ponta do cone localizado na origem do sistema. Como o problema possui simetria cilíndrica escolhemos  $r$ ,  $\theta$  e  $z$  como as coordenadas generalizadas. Temos, dessa forma, a equação de vínculo

$$z = r \cot \alpha \tag{7.26}$$

então existem somente dois graus de liberdade para o sistema, e portanto, somente duas coordenadas generalizadas próprias. Podemos usar a Equação 7.26 para eliminar uma das coordenadas  $z$  ou  $r$ ; optamos pela primeira. Então o quadrado da velocidade é:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

$$= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \cot^2 \alpha$$

$$= \dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2\dot{\theta}^2 \tag{7.27}$$

A energia potencial (se adotarmos  $U = 0$  em  $z = 0$ )

$$U = mgz = mgr \cot \alpha$$

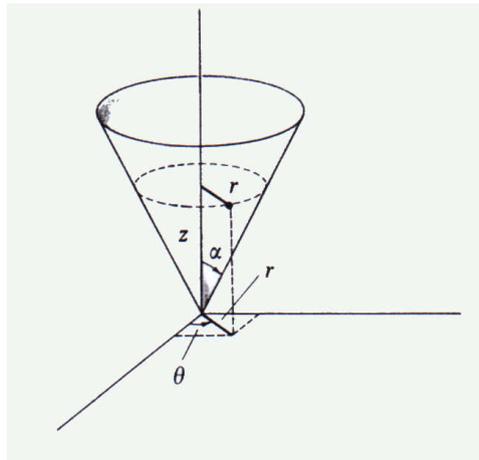


FIGURA 7-2

então a Lagrangeana é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 \csc^2 \alpha + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cot \alpha \tag{7.28}$$

Observamos primeiro que  $L$  não contém explicitamente  $\theta$ . Dessa forma  $\partial L/\partial \theta = 0$  e a equação de Lagrange para a coordenada  $\theta$  é

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

Portanto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} = \text{constante} \tag{7.29}$$

mas  $mr^2 \dot{\theta} = mr^2 \omega$  é justamente o momento angular em torno do eixo  $z$ . Assim, a Equação 7.29 expressa a conservação do momento angular em relação ao eixo de simetria do sistema.

A equação de Lagrange para  $r$  é:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \tag{7.30}$$

Calculando a derivada, encontramos:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0 \tag{7.31}$$

a qual é a equação do movimento para a coordenada  $r$ .

Retornaremos a este exemplo na Seção 8.10 e examinaremos o movimento em mais detalhes.

FIM DO EXEMPLO 7.4

**EXEMPLO 7.5** .....

O ponto de suporte de um pêndulo simples de comprimento  $b$  move com pequena massa na extremidade de um raio  $a$  girando com velocidade angular  $w$  constante. Obtenha a expressão para as componentes cartesianas da velocidade e aceleração da massa  $m$ . Obtenha assim aceleração angular para o ângulo  $\theta$  mostrado na Figura 7-3.

**Solução:** escolhemos a origem do nosso sistemas de coordenadas como sendo o centro de rotação do aro. Os componentes cartesianos da massa  $m$  ficam

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\omega t) + b \sin \theta \\ y &= a \sin(\omega t) - b \cos \theta \end{aligned} \right\} \tag{7.32}$$

As velocidades são

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin(\omega t) + b\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= a\omega \cos(\omega t) + b\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Derivando mais uma vez obteremos a aceleração:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -a\omega^2 \cos(\omega t) + b(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ \ddot{y} &= -a\omega^2 \sin(\omega t) + b(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \end{aligned}$$

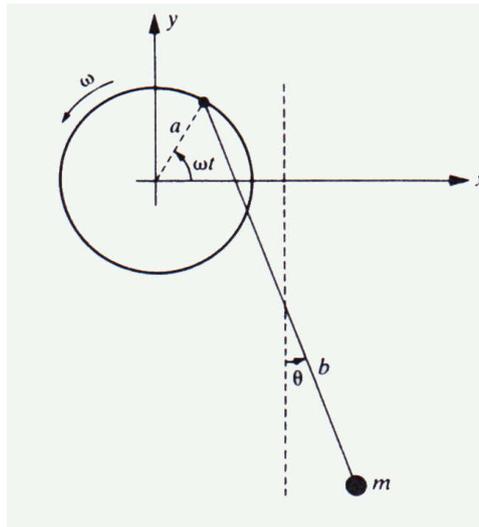


FIGURA 7-3

Agora deve estar claro que a única coordenada generalizada é  $\theta$ . As energias cinética e potenciais são

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ U &= mgy \end{aligned}$$

onde  $U = 0$  e  $y = 0$ . O Lagrangiano é

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{m}{2}[a^2\omega^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2b\dot{\theta}a\omega \sin(\theta - \omega t) \\ &\quad - mg(a \sin \omega t - b \cos \theta)] \end{aligned} \quad (7.34)$$

As derivadas para a equação de Lagrange do movimento, para  $\theta$  são

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mb^2\ddot{\theta} + mb\omega(\dot{\theta} - \omega) \cos(\theta - \omega t) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mb\dot{\theta}a\omega \cos(\theta - \omega t) - mgb \sin \theta \end{aligned}$$

que resulta na equação do movimento (após resolver para  $\ddot{\theta}$ )

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega^2 a}{b} \cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b} \sin \theta \quad (7.35)$$

Observe que este resultado se reduz à bem conhecida equação do movimento para um pêndulo simples se  $\omega = 0$ .

FIM DO EXEMPLO 7.5

**EXEMPLO 7.6**

Encontre a frequência de pequenas oscilações de um pêndulo simples colocado em um vagão de estrada de ferro que tenha uma aceleração constante na direção  $x$ .

**Solução:** Um diagrama esquemático é mostrado na Figura 7-4a para o pêndulo do comprimento  $l$ , massa  $m$ , e com ângulo de deslocamento  $\theta$ . Escolhemos um sistema coordenadas cartesianas fixo com  $x = 0$  e  $\dot{x} = v_0$  em  $t = 0$ . A posição e a velocidade de  $m$  tornam-se assim

$$\begin{aligned}x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + l \sin \theta \\y &= -l \cos \theta \\ \dot{x} &= v_0 + a t + l \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} &= l \dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

As energias cinética e potencial são

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad U = -mgl \cos \theta$$

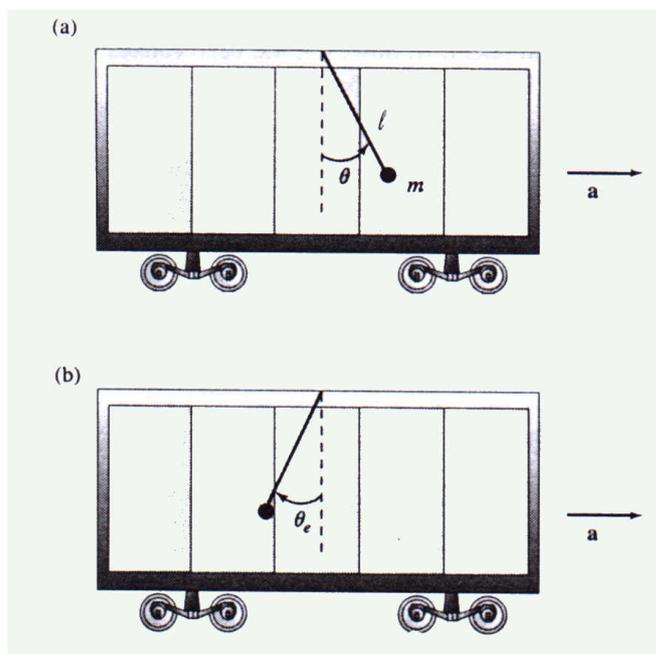


FIGURA 7-4

e a lagrangiana é

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (v_0 + a t + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} m (l \dot{\theta} \sin \theta)^2 + mgl \cos \theta$$

O ângulo  $\theta$  é a única coordenada generalizada, e após ter tomado as derivadas das equações de Lagrange e a apropriada escolha dos termos, a equação de movimento torna-se (Problema 7-2)

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \cos \theta \quad (7.36)$$

Determinamos o ângulo de equilíbrio  $\theta = \theta_e$  fazendo  $\ddot{\theta} = 0$ ,

$$0 = g \sin \theta_e + a \cos \theta_e \quad (7.37)$$

O ângulo do equilíbrio  $\theta_e$  mostrado na Figura 7-4b, é obtido por

$$\tan \theta_e = \frac{-a}{g} \tag{7.38}$$

Como as oscilações são pequenas e são em torno do ângulo de equilíbrio, seja  $\theta = \theta_e + \eta$ , onde  $\eta$  é um ângulo pequeno.

$$\ddot{\theta} = \ddot{\eta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta_e + \eta) - \frac{a}{l} \cos(\theta_e + \eta) \tag{7.39}$$

Expandimos em termos de seno e de cosseno e usamos a aproximação para pequenos ângulos para  $\sin \eta$  e  $\cos \eta$ , mantendo somente os primeiros termos na expansão em série de Taylor.

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= -\frac{g}{l}(\sin \theta_e \cos \eta + \cos \theta_e \sin \eta) - \frac{a}{l}(\cos \theta_e \cos \eta - \sin \theta_e \sin \eta) \\ &= -\frac{g}{l}(\sin \theta_e + \eta \cos \theta_e) - \frac{a}{l}(\cos \theta_e - \eta \sin \theta_e) \\ &= -\frac{1}{l}[(g \sin \theta_e + a \cos \theta_e) + \eta(g \cos \theta_e - a \sin \theta_e)] \end{aligned}$$

O primeiro termo nos colchetes é igual a zero por causa da Equação 7.37, que fornece

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{l}(g \cos \theta_e - a \sin \theta_e)\eta \tag{7.40}$$

Usamos a Equação 7.38 para determinar  $\sin \theta_e$  e  $\cos \theta_e$  e após um pouco de manipulação (Problema 7-2), a Equação 7.40 torna-se

$$\ddot{\eta} = -\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}\eta \tag{7.41}$$

Como esta equação agora representa o movimento harmônico simples, a frequência  $\omega$  é determinada por

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l} \tag{7.42}$$

Este resultado parece plausível, porque  $\omega \rightarrow \sqrt{g/l}$  para  $a = 0$  quando o vagão de estrada de ferro está em repouso.

..... FIM DO EXEMPLO 7.6

EXEMPLO 7.7 .....

Uma gota desliza ao longo de um fio liso dobrado na forma de uma parábola  $z = cr^2$  (Figura 7-5). A gota gira em um círculo do raio  $R$  quando o fio está girando em torno do seu eixo vertical central de simetria com velocidade angular  $\omega$ . Encontre o valor de  $c$ .

**Solução:** Como o problema tem a simetria cilíndrica, escolhamos  $r$ ,  $\theta$ , e  $z$  como as coordenadas generalizadas. A energia cinética da gota é

$$T = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + (r\dot{\theta})^2] \tag{7.43}$$

Se escolhermos  $U = 0$  em  $z = 0$ , o termo da energia potencial é

$$U = mgz \tag{7.44}$$

Mas  $r$ ,  $z$ , e  $\theta$  não são independentes. As equações de vínculo para as parábolas são

$$z = cr^2 \tag{7.45}$$

$$\dot{z} = 2c\dot{r}r \tag{7.46}$$

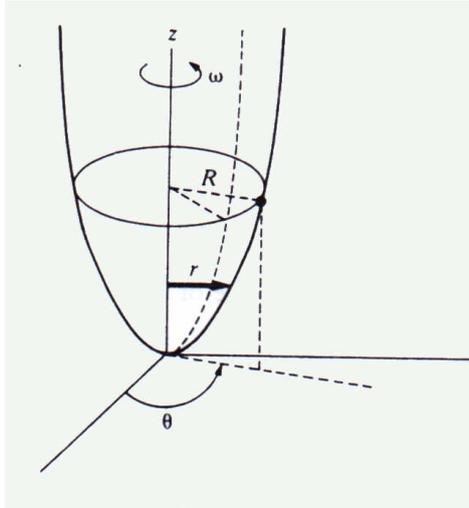


FIGURA 7-5

Também temos uma dependência explícita no tempo da rotação angular

$$\theta = \omega t$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (7.47)$$

Podemos agora construir a Lagrangiana como sendo dependente apenas de  $r$ , porque não existe dependência direta de  $\theta$ .

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2 + r^2 \omega^2) - mgr^2 \end{aligned} \quad (7.48)$$

O problema determina que move a gota mova-se num círculo de raio  $R$ . O leitor deve estar atento neste ponto para fazer  $r = R = \text{constante}$  e  $\dot{r} = 0$ . Deve ser um engano fazer isto agora na Lagrangiana. Primeiro, deveríamos encontrar a equação de movimento para a variável  $r$  e então fazer  $r = R$  como uma condição particular do movimento. Isto determina que o valor particular de  $c$  necessário para  $r = R$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{m}{2}(2\dot{r} + 8c^2 r^2 \dot{r}) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{m}{2}(2\ddot{r} + 16c^2 r \dot{r}^2 + 8c^2 r^2 \ddot{r}) \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m(4c^2 r \dot{r}^2 + r\omega^2 - 2gcr) \end{aligned}$$

A equação de movimento de Lagrange torna-se

$$\ddot{r}(1 + 4c^2 r^2) + \dot{r}^2(4c^2 r) + r(2gc - \omega^2) = 0 \quad (7.49)$$

a qual é um resultado complicado. Se, contudo, a gota girar com  $r = R = \text{constante}$ , então  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ , e a Equação 7.49 fica

$$R(2gc - \omega^2) = 0$$

e

$$c = \frac{\omega^2}{2g} \quad (7.50)$$

é o resultado procurado.

..... FIM DO EXEMPLO 7.7

**EXEMPLO 7.8** .....

Considere um duplo sistema de polias como mostra a Figura 7-6. Use as coordenadas indicadas e encontre as equações de movimento.

**Solução:** Considere as polias de massa pequena, e deixar  $l_1$  e  $l_2$ , com comprimento de corda suspenso livremente com duas polias cada um. As distâncias  $x$  e  $y$  são medidas no centro da duas polias.

$$m_1: \quad v_1 = \dot{x} \quad (7.51)$$

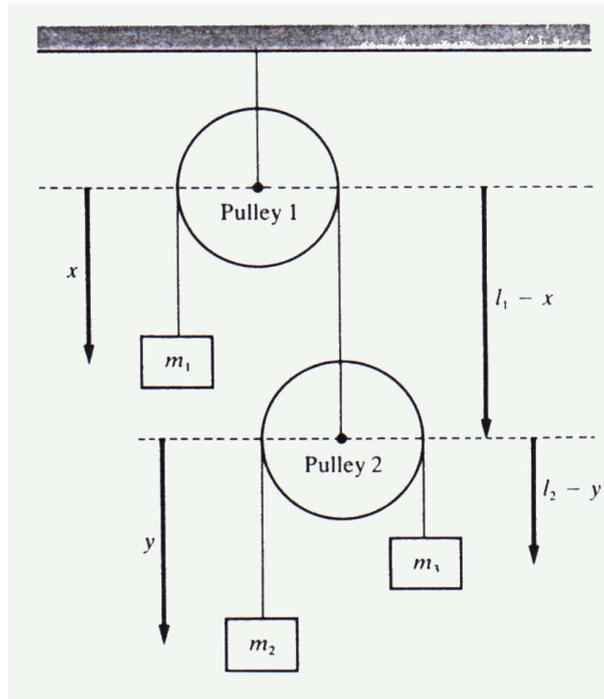


FIGURA 7-6

$$m_2: \quad v_2 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + y) = -\dot{x} + \dot{y} \quad (7.52)$$

$$m_3: \quad v_3 = \frac{d}{dt}(l_1 - x + l_2 - y) = -\dot{x} - \dot{y} \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x} - \dot{y})^2 \end{aligned} \quad (7.54)$$

A energia potencial  $U = 0$  e  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ &= -m_1gx - m_2g(l_1 - x + y) - m_3g(l_1 - x + l_2 - y) \end{aligned} \quad (7.55)$$

Como  $T$  e  $U$  seriam determinadas, as equações de movimento podem ser obtidas usando a Equação 7.18. Os resultados são

$$m_1\ddot{\mathbf{x}} + m_2(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{y}}) + m_3(\ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{y}}) = (m_1 - m_2 - m_3)g \quad (7.56)$$

$$-m_2(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{y}}) + m_3(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{y}}) = (m_2 - m_3)g \quad (7.57)$$

As Equações 7.56 e 7.57 podem ser resolvidas para  $\ddot{\mathbf{x}}$  e  $\ddot{\mathbf{y}}$ .

..... **FIM DO EXEMPLO 7.8**

Os Exemplos 7.2–7.8 indicam a facilidade no uso das equações de Lagrange. Tem sido dito, provavelmente injustamente, que as técnicas Lagrangianas são simplesmente receitas a seguir. O argumento é que perdemos o caminho da “física” pelo seu uso. Os métodos Lagrangianos, ao contrário, são extremamente poderosos e permitem resolver problemas que por outro lado poderiam conduzir a severas complicações usando o método Newtoniano. Problemas simples podem talvez possam ser resolvidas apenas mais facilmente do que usando métodos Newtonianos, porém a técnica lagrangiana pode ser usada para atacar uma grande quantidade de situações físicas complexas (incluindo as da mecânica quântica\*).

## 7.5 EQUAÇÃO DE LAGRANGE COM MULTIPLICADORES INDETERMINADOS

Vínculos que podem ser expressos como relações algébricas entre as coordenadas que são vínculos holonômicos. Se um sistema está submetido apenas a tais vínculos, podemos sempre encontrar um conjunto próprio de coordenadas generalizadas em termos das quais as equações de movimento são livres de uma referência explícita com os vínculos.

Alguns vínculos que podem ser expressos em termos das *velocidades* das partículas no sistema são da forma

$$f(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t) = 0 \quad (7.58)$$

e constituem vínculos não-holonômicos *a menos* que as equações possam ser integradas para produzirem relações entre as coordenadas.<sup>†</sup>

Considere uma relação de vínculo da forma

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.59)$$

Em geral, esta equação é não integrável, e portanto o vínculo é não-holonômico. Mas se  $A_i$  e  $B$  tem as formas

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(x_i, t) \quad (7.60)$$

então a Equação 7.59 pode ser escrita como:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (7.61)$$

Mas isso é justamente

$$\frac{df}{dt} = 0$$

a qual pode ser integrada para produzir

$$f(x_i, t) - \text{constante} = 0 \quad (7.62)$$

e assim o vínculo é realmente holonômico.

Da discussão anterior, concluímos que os vínculos que podem ser expressos na forma diferencial

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \quad (7.63)$$

\*Olhar Feynman e Hibbs (Fe65).

<sup>†</sup>Esses vínculos são algumas vezes chamados “semi-holonômicos”.

são equivalentes aqueles que tem a forma da Equação 7.9.

Se as relações de vínculos para um problema são dadas na forma diferencial em vez de expressões algébricas, podemos incorporá-las diretamente nas equações de Lagrange, usando os multiplicadores indeterminados de Lagrange (ver Seção 6.6) sem antes realizar as integrações; isto é, para vínculos que podem ser expressos como a Equação 6.71,

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, s \\ i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (7.64)$$

as equações de Lagrange (Equação 6.69) são

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_k \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0 \quad (7.65)$$

De fato, devido ao processo de variação envolvido no Princípio de Hamilton onde o tempo é assegurado constante nos pontos extremos, podemos adicionar a Equação 7.64 um termo  $(\partial f_k / \partial t) dt$  sem afetar a equação de movimento. Então, os vínculos expressos pela Equação 7.63 também levam as equações de Lagrange dadas pela Equação 7.65.

A grande vantagem da formulação Lagrangeana para a mecânica é que a inclusão explícita das forças de vínculo não é necessária; isto é, a ênfase está localizada na dinâmica do sistema ao invés do cálculo das forças agindo em cada componente do sistema. Em certos casos, entretanto, pode ser preciso saber as forças de vínculo. Por exemplo, do ponto de vista da engenharia, isto poderia ser útil para saber as forças de vínculo para propósitos de projeto. É portanto importante que nas equações de Lagrange, como na Equação 7.65, **os multiplicadores indeterminados  $\lambda_k(t)$  sejam justamente essas forças de vínculo\***. As forças generalizadas de vínculo  $Q_j$  são dadas por

$$Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \quad (7.66)$$

**EXEMPLO 7.9** .....

Vamos considerar novamente o caso do disco rolando em um plano inclinado (veja o Exemplo 6.5 e a Figura 6-7). Encontre a equação do movimento, a força de vínculo, e a aceleração angular.

**Solução:** A energia cinética pode ser separada em termos de movimentos translacional e rotacional<sup>†</sup>.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

onde  $M$  é a massa do disco e  $R$  é o raio;  $I = \frac{1}{2} M R^2$  é o momento de inércia do disco em torno do eixo central. A energia potencial é:

$$U = M g (l - y) \sin \alpha \quad (7.67)$$

onde  $l$  é o comprimento da superfície inclinada do plano e onde o disco é assumido ter energia potencial nula na parte inferior do plano. A Lagrangeana é, portanto

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 + M g (l - y) \sin \alpha \end{aligned} \quad (7.68)$$

\*Veja, por exemplo, Goldstein (Go80, p.47). Cálculos explícitos das forças de vínculo em alguns problemas específicos foram feitos por Becker (Be54, Capítulos 11 e 13) e por Symon (Sy71, p.372ff).

<sup>†</sup>Antecipamos aqui um resultado bem conhecido de corpos rígidos discutidos no Capítulo 11.

A equação de vínculo é

$$f(y, \theta) = y - R\theta = 0 \quad (7.69)$$

O sistema tem somente um grau de liberdade se insistirmos que o rolamento ocorre sem deslizar. Podemos, portanto, escolher qualquer  $y$  ou  $\theta$  como coordenada própria, e usar a Equação 7.69 para eliminar a outra. Alternativamente, podemos continuar considerando ambos  $y$  e  $\theta$  como coordenadas generalizadas e usando o método de multiplicadores indeterminados. As equações de Lagrange nesse caso são

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

Fazendo as diferenciações, obtemos, para as equações do movimento,

$$Mg \sin \alpha - M\ddot{y} + \lambda = 0 \quad (7.71a)$$

$$-\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0 \quad (7.71b)$$

Igualmente, da equação de vínculo, temos

$$y = R\theta \quad (7.72)$$

Essas equações (Equações 7.71 e 7.72) constituem a solução do sistema para as três incógnitas  $y$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ . Diferenciando a equação de vínculo (Equação 7.72), obtemos

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} \quad (7.73)$$

Combinando as Equações 7.71b e 7.73, encontramos

$$\lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{y} \quad (7.74)$$

e então usando essa expressão na Equação 7.71a resulta em

$$\ddot{y} = \frac{2g \sin \alpha}{3} \quad (7.75)$$

com

$$\lambda = \frac{Mg \sin \alpha}{3} \quad (7.76)$$

de modo que a Equação 7.71b produza

$$\ddot{\theta} = \frac{2g \sin \alpha}{3R} \quad (7.77)$$

Assim, temos três equações para as quantidades  $\ddot{y}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $e\lambda$  que podem imediatamente ser integradas.

Notamos que se o disco deslizar, sem atrito plano abaixo, teríamos  $\ddot{y} = g \sin \alpha$ . Conseqüentemente, o vínculo de rolamento reduz a aceleração a  $\frac{2}{3}$  do valor do deslizamento sem atrito. O valor da força de atrito que produz o vínculo é justamente  $\lambda$ —isto é,  $(Mg/3) \sin \alpha$ .

As forças generalizadas de vínculo, Equações 7.66, são

$$Q_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{Mg \sin \alpha}{3}$$

$$Q_\theta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{MgR \sin \alpha}{3}$$

Note que  $Q_y$  e  $Q_\theta$  são: uma força e um torque, respectivamente, e elas são as forças generalizadas de vínculo requeridas para manter o rolamento do disco plano abaixo sem deslizar.

Note que podemos eliminar  $\dot{\theta}$  da Lagrangeana substituindo  $\dot{\theta} = \dot{y}/R$  da equação do vínculo:

$$L = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 + Mg(y - l) \sin \alpha \tag{7.78}$$

A Lagrangeana é expressa então nos termos de uma única coordenada própria, e a única equação do movimento é obtida imediatamente da Equação 7.18:

$$Mg \sin \alpha - \frac{3}{4}M\ddot{y} = 0 \tag{7.79}$$

a qual é a mesma que a Equação 7.75. Embora este procedimento seja mais simples, não pode ser usado obter a força de vínculo.

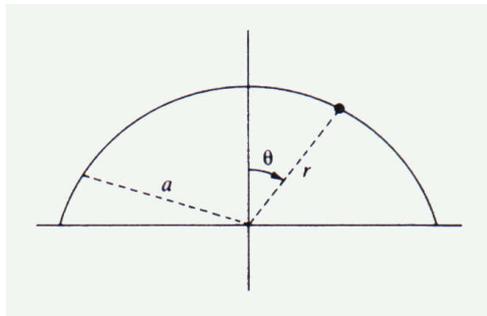
FIM DO EXEMPLO 7.9

**EXEMPLO 7.10** .....

Uma partícula de massa  $m$  parte do repouso no alto de um hemisfério (meia esfera) fixo liso de raio  $a$ . Encontre a força de vínculo, e determine o ângulo em que a partícula abandona o hemisfério.

**Solução:** Veja a Figura 7-7. Como estamos considerando a possibilidade da partícula abandonar o hemisfério, escolhemos as coordenadas generalizadas  $r$  e  $\theta$ . A equação do vínculo é

$$f(r, \theta) = r - a = 0 \tag{7.80}$$



**FIGURA 7-7**

A lagrangeana é determinada pelas energias cinética e potencial:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \\ U &= mgr \cos \theta \\ L &= T - U \\ L &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta \end{aligned} \tag{7.81}$$

onde, a energia potencial é zero na parte mais baixa do hemisfério (i.e. para  $\theta = 90^\circ$ ). As equações de Lagrange, Equação 7.65, são

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \tag{7.82}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{7.83}$$

Executando as diferenciações na Equação 7.80 temos

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (7.84)$$

As Equações 7.82 e 7.83 tornam-se

$$mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - m\ddot{r} + \lambda = 0 \quad (7.85)$$

$$mgr \sin \theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (7.86)$$

A seguir, aplicamos o vínculo  $r = a$  a estas equações do movimento:

$$r = a, \quad \dot{r} = 0 = \ddot{r}$$

As Equações 7.85 e 7.86 tornam-se então

$$ma\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0 \quad (7.87)$$

$$mga \sin \theta - ma^2\ddot{\theta} = 0 \quad (7.88)$$

Da equação 7.88, temos

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a} \sin \theta \quad (7.89)$$

Podemos integrar a Equação 7.89 para determinar  $\dot{\theta}^2$ .

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad (7.90)$$

Integramos a Equação 7.89,

$$\int \dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{g}{a} \int \sin \theta d\theta \quad (7.91)$$

que resulta em

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{-g}{a} \cos \theta + \frac{g}{a} \quad (7.92)$$

onde a constante de integração é  $g/a$ , porque  $\dot{\theta} = 0$  em  $t = 0$  quando  $\theta = 0$ . Substituindo  $\dot{\theta}^2$  da Equação 7.92 na Equação 7.87 fornece, após resolver para  $\lambda$ ,

$$\lambda = mg(3 \cos \theta_0 - 2) \quad (7.93)$$

a qual é a força de vínculo. A partícula cai (abandona) do hemisfério no ângulo  $\theta_0$  quando  $\lambda = 0$ .

$$\lambda = 0 = mg(3 \cos \theta_0 - 2) \quad (7.94)$$

$$\theta_0 = \cos^{-1} \left( \frac{2}{3} \right) \quad (7.95)$$

Com uma verificação rápida, observe que a força de vínculo é  $\lambda = mg$  em  $\theta = 0$  quando a partícula está em repouso no alto do hemisfério.

..... **FIM DO EXEMPLO 7.10**

A utilidade do método de multiplicadores indeterminados é duplo:

1. Os multiplicadores de Lagrange são as forças do vínculo que são frequentemente necessárias.
2. Quando um conjunto próprio de coordenadas generalizadas não é desejado ou demasiado difícil de obter, o método pode ser usado para aumentar o número de coordenadas generalizadas incluindo relações do vínculo entre as coordenadas.

## 7.6 EQUIVALÊNCIA DAS EQUAÇÕES DE LAGRANGE E DE NEWTON

Como enfatizamos inicialmente, as formulações Lagrangeanas e Newtonianas da mecânica são equivalentes: o ponto da vista é diferente, mas o conteúdo é o mesmo. Agora vamos demonstrar explicitamente esta equivalência mostrando que os dois conjuntos de equações de movimento são de fato o mesmo.

Na Equação 7.18, vamos escolher o sistema de coordenadas generalizadas como sendo o retangular. As equações de Lagrange para uma só partícula são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.96)$$

ou

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Porém em coordenadas retangulares e para um sistema conservativo, temos  $T = T(\dot{x}_i)$  e  $U = U(x_i)$ , então

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

As equações de Lagrange portanto se tornam

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \quad (7.97)$$

Temos ainda ( para um sistema conservativo)

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{p}_i$$

então as Equações 7.97 resultam nas equações de Newton, como desejávamos:

$$F_i = \dot{p}_i \quad (7.98)$$

Portanto, as equações de Lagrange e de Newton são idênticas se o sistema de coordenadas generalizadas é o retangular.

Agora vamos derivar as equações do movimento de Lagrange usando os conceitos Newtonianos. Considere, para simplificar apenas uma partícula. Precisamos transformar o sistema de coordenadas  $x_i$  para o sistema de coordenadas generalizadas  $q_j$ . Da Equação 7.5, temos

$$x_i = x_i(q_j, t) \quad (7.99)$$

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (7.100)$$

e

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \quad (7.101)$$

INFORMAÇÃO ADICIONAL: DETALHAMENTO MATEMÁTICO

Complementando as equações acima, começemos com a primeira, Equação 7.99, que é expressa explicitamente da seguinte maneira:

$$x_i = x_i(q_j, t) = x_i(q_j(t), t) \quad (\text{Eq. 7.99})$$

Desta forma, a segunda equação fica:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

ou

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (\text{Eq. 7.100})$$

com  $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$ . Já para a Equação 7.101 é conveniente e aconselhável expandir (*abrir*) o somatório. Ou seja, para  $i = 1$ , da Eq. 7.100, expandindo também o somatório em  $j$  até 2, temos:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x_1}{\partial t} \quad (\text{A})$$

e para  $i = 2$ :

$$\dot{x}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x_2}{\partial t} \quad (\text{B})$$

Agora derivamos estas duas expressões em relação a  $\dot{q}_i$ . Especulemos novamente para  $i = 2$  para cada equação acima, isto é, para a Eq. (A):

$$\begin{aligned} (i = 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_1}}_0 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial x_1}{\partial t}}_0 \\ &= \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \end{aligned}$$

e agora para a Eq. (B)

$$\begin{aligned} (i = 2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left( \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_2}}_0 + \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial \dot{q}_2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \frac{\partial x_2}{\partial t}}_0 \\ &= \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{aligned}$$

e se fizermos para outros valores de  $i$  e  $j$  perceberemos que nesta operação resultarão sempre os casos em que  $i = j$ . Assim, generalizando temos:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \quad (\text{Eq. 7.101})$$

O momento generalizado  $p_j$  associado com  $q_j$  é facilmente determinado por

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (\text{7.102})$$

Por exemplo, para uma partícula movendo-se em coordenadas polares planares,  $T = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)m/2$ , temos  $p_r = m\dot{r}$  para a coordenada  $r$  e  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$  para a coordenada  $\theta$ . Obviamente  $p_r$  é um momento linear e  $p_\theta$  é um momento angular, de maneira que o nosso momento generalizado parece consistente com os conceitos Newtonianos.

Podemos determinar uma força generalizada considerando o trabalho virtual  $\delta W$  feito por um caminho variado  $\delta x_i$  como descrito na Seção 6.7.

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{7.103}$$

$$\equiv \sum_j Q_j \delta q_j \tag{7.104}$$

de forma que a força generalizada  $Q_j$  associada com  $q_j$  é

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{7.105}$$

Pelo fato de trabalho ser sempre energia, também o é o produto  $Qq$ . Se  $q$  é um comprimento,  $Q$  é uma força; se  $q$  é um ângulo,  $Q$  é um torque. Para um sistema conservativo,  $Q_j$  é derivável da energia potencial:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{7.106}$$

Agora estamos prontos para obter as equações de Lagrange:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 \right) \\ &= \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ p_j &= \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{7.107}$$

onde usamos a Equação 7.101 para o último passo. Tomando a derivada temporal da Equação 7.107 temos

$$\dot{p}_j = \sum_i \left( m \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \tag{7.108}$$

Expandindo os último termo, temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}$$

INFORMAÇÃO ADICIONAL: DETALHAMENTO MATEMÁTICO

Inicialmente assumimos que  $\bar{x}_i \equiv \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$  e, como  $\bar{x}_i = \bar{x}_i(q_k(t), t)$  temos:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t}$$

usamos que  $\dot{q}_k \equiv \frac{dq_k}{dt}$  e assim finalmente temos:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}$$

e a Equação 7.108 se torna

$$\dot{p}_j = \sum_i m\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i,k} m\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \quad (7.109)$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 7.109 é tão somente  $Q_j$  ( $F_i = m\ddot{x}_i$  e a Equação 7.105). A soma dos dois outros termos é  $\partial T / \partial q_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7.110)$$

onde usamos  $T = \sum_i \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2$  e a Equação 7.100.

INFORMAÇÃO ADICIONAL: DETALHAMENTO MATEMÁTICO

Analisemos um pouco mais as Equações 7.109 e 7.110.

$$\dot{p}_j = \underbrace{\sum_i \underbrace{m\ddot{x}_i}_{F_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{Q_j} + \underbrace{\sum_{i,k} m\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}}_{\frac{\partial T}{\partial q_j}}$$

Investiguemos esta última expressão, isto é, verifiquemos se realmente é  $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ . Como

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2; \quad \text{onde: } x_i = x_i(q_j(t), t)$$

então:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2 \right) = m\dot{x}_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial q_j} + m\dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial q_j} + \dots + m\dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_j} = \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}$$

e usando a Eq. 7.100

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad (\text{Eq. 7.100})$$

trocando o índice  $j$  por  $k$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right] \\ &= \sum_i \sum_k m\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \sum_i m\dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \end{aligned}$$

A Equação 7.109 pode agora ser escrita como

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \quad (7.111)$$

ou, usando as Equações 7.102 e 7.106,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (7.112)$$

Como  $U$  não depende da velocidade generalizada  $\dot{q}_j$ , a Equação 7.112 pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} = 0 \quad (7.113)$$

e usando  $L = T - U$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (7.114)$$

que são as equações de Lagrange do movimento.

## 7.7 ESSÊNCIA DA DINÂMICA LAGRANGIANA

Nas seções precedentes, fizemos vários enunciados gerais e importantes sobre a formulação de Lagrange para a mecânica. Antes de prosseguir adiante, vamos resumir esses pontos para enfatizar as diferenças entre os pontos de vista de Lagrange e de Newton.

Históricamente, as equações de Lagrange expressadas em coordenadas generalizadas foram derivadas antes da proposição do princípio de Hamilton\*. Decidimos deduzir as equações de Lagrange postulando o princípio de Hamilton porque esta é a aproximação mais direta e é também o método formal para unificar a dinâmica clássica.

Inicialmente, devemos reiterar que a dinâmica Lagrangeana não constitui uma teoria nova em nenhum sentido da palavra. Os resultados de uma análise Lagrangeana ou de uma análise Newtoniana devem ser os mesmos para todo o sistema mecânico considerado. A única diferença é o método usado para obter estes resultados.

Visto que a aproximação Newtoniana enfatiza um agente externo atuando sobre um corpo (a *força*), o método Lagrangeano trata somente das grandezas associadas a corpo (as *energias* cinética e potencial). De fato, em nenhuma parte na formulação Lagrangeana entre o conceito de *força*. Esta é uma propriedade particular importante—e por uma variedade das razões. Primeiro, porque a energia é uma quantidade escalar, a função Lagrangeana para um sistema é invariante as transformações das coordenadas. Certamente, tais transformações não são restritas a sistemas de coordenadas ortogonais no espaço ordinário (*normal*); elas podem também ser transformações entre a coordenada *ordinárias* e coordenadas *generalizadas*. Assim, é possível passar do espaço ordinário (no qual as equações do movimento podem ser completamente complicadas) para um espaço da configuração que possa ser escolhido produzindo uma máxima simplificação para um problema particular. Somos acostumados a pensar em sistemas mecânicos nos termos de grandezas *vetoriais* tais como a força, a velocidade, o momento angular, e o torque. Mas na formulação Lagrangeana, as equações do movimento são obtidas inteiramente em termos de operações *escalares* no espaço de configuração.

Um outro aspecto importante do ponto de vista da força-versus-energia é que em determinadas situações que não é possível indicar explicitamente todas as forças que agem em um corpo (como é às vezes a caixa para forças de vínculo), enquanto que é possível dar expressões para as energias cinética e potencial. É este fato que faz o princípio de Hamilton útil para os sistemas da mecânica quântica onde normalmente sabemos as energias envolvidas mas não as forças.

O procedimento diferencial de mecânica contidas nas equações de Newton ou o procedimento integral incluído no princípio de Hamilton (e nas equações Lagrangeanas resultantes) foram mostradas que são inteiramente equivalentes. Portanto, nenhuma distinção existe entre estes pontos de vista, que são baseados na descrição de *efeitos físicos*. Mas de um ponto de vista filosófico, podemos fazer uma distinção. Na formulação Newtoniana, uma força sobre um corpo provoca um movimento definido—isto é, associamos sempre um *efeito* definido com alguma *causa*. De acordo com o princípio de Hamilton, entretanto, o movimento de um corpo resulta da tentativa da natureza executar um certo *propósito*, ou seja, minimizar a integral do tempo da diferença entre as energias cinética e potencial. A solução operacional de problemas em mecânica não depende de adotar uma ou outra destas visões. Mas historicamente tais considerações tiveram uma profunda influência no desenvolvimento da dinâmica (como, por exemplo, no princípio de Maupertuis, mencionado na Seção 7.2). O leitor interessado deverá consultar o excelente livro de Margenau para uma discussão desta matéria†.

\*Eqs. de Lagrange: 1788; Princípio de Hamilton:1834

†Margenau (Ma77, Capítulo 19)

## 7.8 UM TEOREMA A RESPEITO DA ENERGIA CINÉTICA

Se a energia cinética for expressa em coordenadas fixas, retangulares por exemplo, o resultado é uma função quadrática homogênea de  $\dot{x}_{a,i}$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{a,i}^2 \quad (7.115)$$

desejamos agora considerar mais detalhadamente a dependência de  $T$  nas coordenadas generalizadas e nas velocidades generalizadas. Para muitas partículas, as Equações 7.99 e 7.100 tornam-se

$$x_{a,i} = x_{a,i}(q_j, t), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (7.116)$$

$$\dot{x}_{a,i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \quad (7.117)$$

Elevando o quadrado de  $\dot{x}_{a,i}$ , obtemos

$$\dot{x}_{a,i}^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left( \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right)^2 \quad (7.118)$$

e a energia cinética se tornam

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &+ \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \dot{q}_j \\ &+ \sum_{\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_{\alpha} \left( \frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.119)$$

assim, temos o resultado geral

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c \quad (7.120)$$

Um caso particular importante ocorre quando o sistema é *escleronômico*, de modo que o tempo não apareça explicitamente nas equações de transformação (Equação 7.116); então as derivadas parciais do tempo desaparecem:

$$\frac{\partial x_{a,i}}{\partial t} = 0, \quad b_j = 0, \quad c = 0$$

Conseqüentemente, sob estas circunstâncias, a energia cinética é uma *função quadrática homogênea* das velocidades generalizadas:

$$T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (7.121)$$

A seguir, diferenciamos a Equação 7.121 com respeito a  $\dot{q}_t$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_t} = \sum_k a_{tk} \dot{q}_k + \sum_j a_{jt} \dot{q}_j$$

Multiplicando esta equação por  $\dot{q}_t$  e somando  $l$  excedente, temos

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l} a_{lk} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,l} a_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l$$

Neste caso, todos os índices são mudos, assim ambos os termos no lado direito são idênticos:

$$\boxed{\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T} \quad (7.122)$$

este importante resultado é um caso especial do *Teorema de Euler*, o qual declara que se  $f(y_k)$  é uma função homogênea do  $y_k$  que é de grau  $n$ , então

$$\sum_k y_k \frac{\partial f}{\partial y_k} = n f \quad (7.123)$$

## 7.9 OS TEOREMAS DA CONSERVAÇÃO REVISTOS

### Conservação de energia

Vimos em nossos argumentos\* precedentes que o *tempo* é homogêneo dentro de um sistema de referência inercial. Conseqüentemente, o Lagrangeana que descreve um *sistema fechado* (isto é, um sistema que não interage com o qualquer coisa fora do sistema) não pode depender explicitamente do tempo†, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (7.124)$$

de modo que a derivada total da Lagrangeana se torna

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \quad (7.125)$$

onde o termo usual,  $\partial L/\partial t$  não aparece. Mas as equações de Lagrange são

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (7.126)$$

Usando a Equação 7.126 para substituir em  $\partial L/\partial q_j$  na Equação 7.125, temos

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

ou

$$\frac{dL}{dt} - \sum_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} \left( L - \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (7.127)$$

A quantidade entre parênteses é conseqüentemente constante no tempo; denotando esta constante por  $-H$ :

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H = \text{constante} \quad (7.128)$$

Se a energia potencial  $U$  não depender explicitamente das velocidades  $\dot{x}_{\alpha,i}$  ou do tempo  $t$ , então  $U = U(x_{\alpha,i})$ . As relações que conectam as coordenadas retangulares e as coordenadas generalizadas são da forma  $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j)$  ou  $q_j = q_j(x_{\alpha,i})$ , onde excluimos a possibilidade de uma dependência explícita do tempo nas equações de transformação. Conseqüentemente,  $U = U(q_j)$ , e  $\partial U/\partial \dot{q}_j = 0$ . Assim

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

\*Olhar Seção 2.3

†A Lagrangeana é igualmente independente do tempo se o sistema existir num campo de forças uniforme

A Equação 7.128 pode então ser escrita como

$$(T - U) - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -H \quad (7.129)$$

e, usando a Equação 7.122, temos

$$(T - U) - 2T = -H$$

ou

$$T + U = E = H = \text{constante} \quad (7.130)$$

A energia total  $E$  é uma constante do movimento para este caso.

A função  $H$ , chamada a **Hamiltoniana** do sistema, pode ser definida como na Equação 7.128 (mas veja a Seção 7.10). É importante observar que a Hamiltoniana  $H$  é igual à energia total  $E$  somente se as seguintes condições são reunidas:

1. As equações da transformação que conectam as coordenadas retangulares e generalizadas (Equação 7.116) devem ser independente do tempo, assim assegura-se que a energia cinética seja uma função quadrática homogênea de  $\dot{q}_j$ .
2. A energia potencial deve ser independente da velocidade, permitindo assim a eliminação dos termos  $\partial U / \partial \dot{q}_j$  da equação para  $H$  (Equação 7.129).

As questões “O que faz  $H = E$  para o sistema?” e “é a energia conservada para o sistema?”, então, são dois aspectos *diferentes* do problema, e cada pergunta deve ser examinada separadamente. Podemos, por exemplo, ter casos em que a Hamiltoniana não é igual a energia total, e apesar disso, a energia é conservada. Desta forma, considere um sistema conservativo, e permita que a descrição possa ser feita em termos de coordenadas generalizadas no movimento com respeito aos eixos fixos, retangulares, por exemplo. As equações da transformação contêm então o tempo, e a energia cinética *não* é uma função quadrática homogênea das velocidades generalizadas. A escolha de um conjunto conveniente matematicamente de coordenadas generalizadas não pode alterar o fato físico que a energia é conservada. Mas no sistema de coordenadas em movimento, a Hamiltoniana não é mais igual à energia total.

### Conservação do momento linear

Como o espaço é homogêneo em um sistema inercial, a Lagrangeana do sistema fechado não é afetado por uma translação do sistema inteiro no espaço. Considere uma translação infinitesimal de cada raio vetor  $\mathbf{r}_\alpha$  tal que  $\mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}$ ; estas quantidades transladam o sistema inteiro por  $\delta\mathbf{r}$ . Para simplificar, vamos examinar um sistema que consiste somente em uma única partícula (incluindo um somatório sobre  $\alpha$  poderíamos considerar um sistema da  $n$ -partículas em uma maneira inteiramente equivalente), e vamos escrever a Lagrangeana em termos de coordenadas retangulares  $L = L(x_i, \dot{x}_i)$ . A alteração em  $L$  causado pelo deslocamento infinitesimal  $\delta\mathbf{r} = \sum_i \delta x_i \mathbf{e}_i$  é

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 \quad (7.131)$$

Consideramos somente um *deslocamento* variado, de modo que o  $\delta x_i$  não são funções explícitas ou implícitas do tempo. Assim,

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i \equiv 0 \quad (7.132)$$

Consequentemente,  $\delta L$  torna-se

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (7.133)$$

Como cada um dos  $\delta x_i$  é um deslocamento independente,  $\delta L$  desaparece identicamente somente se cada uma das derivadas parciais de  $L$  desaparecer:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (7.134)$$

Então, de acordo com as equações de Lagranges,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (7.135)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{constante} \quad (7.136)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \right) \\ &= m \dot{x}_i = p_i = \text{constante} \end{aligned} \quad (7.137)$$

Assim, a homogeneidade do espaço implica que o momento linear  $\mathbf{p}$  de um sistema fechado é constante no tempo.

Este resultado pode também ser interpretado de acordo com o seguinte enunciado: se a Lagrangeana de um sistema (não necessariamente *fechado*) é invariável com respeito a translação numa determinada direção, então o momento linear do sistema em tal direção é constante a tempo.

### Conservação do Momento Angular

Indicamos na Seção 2.3 que uma característica de um sistema de referência inercial é que o espaço é *isotrópico*—isto é, que as propriedades mecânicas de um sistema fechado não são afetadas pela orientação do sistema, a Lagrangeana de um sistema fechado não muda se o sistema é girado por um ângulo infinitesimal\*.

Se um sistema é rotado em torno de um determinado eixo por um ângulo infinitesimal  $\delta\theta$  (veja Figura 7-8), o raio vetor  $\mathbf{r}$  para a um dado ponto muda para  $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ , onde (veja a Equação 1.106)

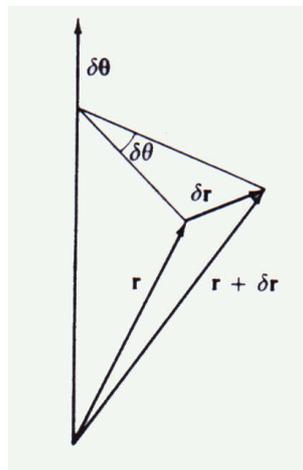


FIGURA 7-8

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \quad (7.138)$$

O vetor velocidade também muda com a rotação do sistema, e como a equação de transformação para todos os vetores é a mesma, temos

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \delta\boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (7.139)$$

\*Limitamos a rotação a um ângulo infinitesimal porque desejamos representar a rotação por um vetor; veja a Seção 1.15

Consideramos somente uma única partícula e escrevemos a Lagrangeana em coordenadas retangulares. A mudança em  $L$  causada por uma rotação infinitesimal é

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0 \quad (7.140)$$

As Equações 7.136 e 7.137 mostram que os componentes retangulares do vetor momento são dados por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (7.141)$$

A equação de Lagrange pode então ser expressa por:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (7.142)$$

Portanto, a Equação 7.140 torna-se

$$\delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0 \quad (7.143)$$

ou

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (7.144)$$

Usando as Equações 7.138 e 7.139, esta equação pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) + \mathbf{p} \cdot (\delta \boldsymbol{\theta} \times \dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (7.145)$$

Podemos permutar em ordem cíclica os fatores do produto escalar triplo sem alterar os valores. Assim,

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + \delta \boldsymbol{\theta} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

ou

$$\delta \boldsymbol{\theta} \cdot [(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = 0 \quad (7.146)$$

Os termos entre colchetes são exatamente os fatores que resultam da diferenciação com respeito ao tempo de  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ :

$$\delta \boldsymbol{\theta} \times \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (7.147)$$

Como  $\delta \boldsymbol{\theta}$  é arbitrário, devemos ter

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0 \quad (7.148)$$

assim

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{constante} \quad (7.149)$$

Mas  $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$ , o momento angular da partícula do sistema fechado é portanto constante no tempo.

Um importante corolário\* do teorema é o seguinte. Consideremos um sistema num campo de forças externo. Se o campo possuir um eixo de simetria, então a Lagrangeana do sistema é invariante com respeito as rotações sobre o eixo de simetria. Portanto, o momento angular do sistema em torno do eixo de simetria é constante no tempo. Este é exatamente o caso discutido no Exemplo 7.4; a direção vertical estava sobre o eixo de simetria do sistema, e o momento angular sobre esse eixo foi conservado.

A importância da conexão entre as propriedades de *simetrias* e a *invariância* das quantidades físicas pode tão somente ser enfatizada de forma exagerada. A associação foi além da conservação do momento—sem dúvida além de sistemas clássicos—e encontramos uma extensa aplicação na teoria moderna dos fenômenos de campo e partículas elementares.

Derivamos os teoremas de conservação para um sistema simplesmente fechado considerando as propriedades de um sistema de referência inercial. Os resultados podem ser resumidos como na Tabela 7-1.

\* *Corolário:* 1) proposição que imediatamente se deduz de outra demonstrada. 2) decorrência, dedução, consequência, resultado, consectário.

TABELA 7-1

Características do sistema inercial	Propriedades da Lagrangeana	Quantidade conservada
Tempo homogêneo	Função não explícita do tempo	Energia total
Espaço homogêneo	Invariante à translação	Momento linear
Espaço Isotrópico	Invariante à rotação	Momento angular

Existem sete constantes (ou integrais) de movimento para um sistema fechado: energia total, momento linear (três componentes), e momento angular (três componentes). Estas e somente estas sete integrais tem as propriedades que são *aditivas* para as partículas que compõem o sistema; eles possuem estas propriedades se existe ou não uma interação entre as partículas.

## 7.10 EQUAÇÕES CANÔNICAS DE MOVIMENTO – DINÂMICA HAMILTONIANA

Na seção anterior, encontramos que se a energia potencial do sistema é independente da velocidade, então o momento linear dos componentes em coordenadas retangulares são dadas por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (7.150)$$

Por analogia, estendemos este resultado para o caso na qual a Lagrangeana está expressa por coordenadas generalizadas e define a **momento generalizado\*** de acordo com

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (7.151)$$

(Infelizmente, a notação costumeira para o momento ordinário e momento generalizado são iguais, mesmo que as duas grandezas possam ser completamente diferentes.) As equações de Lagrange são então expressas por

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (7.152)$$

Usando a definição de momentos generalizados, a Equação 7.128 para a Hamiltoniana deve ser escrita como:

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad (7.153)$$

A Lagrangeana é considerada ser a função das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas, e possivelmente do tempo. A dependência do  $L$  do tempo deve aparecer também se os vínculos são dependentes do tempo ou se as equações de transformações conectando as coordenadas retangulares e as coordenadas generalizadas explicitamente contém o tempo. (Lembre que não consideramos potencial dependente do tempo.) Devemos resolver a Equação 7.151 para as velocidades generalizadas e expressá-las como

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_k, p_k, t) \quad (7.154)$$

Assim, na Equação 7.153, devemos fazer uma mudança de variáveis do conjunto  $(q_j, \dot{q}_j, t)$  para o conjunto  $(q_j, p_j, t)^\dagger$  e expressa a Hamiltoniana como

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - l(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (7.155)$$

\*Os termos das *coordenadas generalizadas*, *velocidades generalizadas* e *momentos generalizados* foram introduzidos em 1867 pelo senhor Thomson William (posterior, Kelvin Lord) e P.G. Tait em sua famosa obra *Natural Philosophy*.

†Esta mudança de variáveis é similar aquela que freqüentemente é encontrada na termodinâmica e cai na classe geral das assim chamadas transformações de Legendre (usado inicialmente por Euler e quem sabe mesmo por Leibniz). Uma discussão geral das transformações de Legendre com ênfase sobre sua importância na mecânica é dado por Lanczos (La 49, chapter 6).

Esta equação é escrita numa maneira que a tensão do fato que a *Hamiltoniana é sempre considerada como uma função do conjunto*  $(q_k, p_k, t)$ , enquanto que a *Lagrangeana é uma função do conjunto*  $(q_k, \dot{q}_k, t)$ :

$$\boxed{H = H(q_k, p_k, t), \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t)} \quad (7.156)$$

A diferencial total de  $H$  é, portanto,

$$dH = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (7.157)$$

Segundo a equação 7.155, podemos também escrever

$$dH = \sum_k \left( \dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (7.158)$$

Usando as Equações 7.151 e 7.152 para substituir por  $\partial L/\partial q_k$  e  $\partial L/\partial \dot{q}_k$ , o segundo e o quarto termos entre parênteses na Equação 7.158 cancelam-se, e lá permanecem

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (7.159)$$

Se identificarmos os coeficientes\* de  $dq_k$ ,  $dp_k$  e  $dt$  entre as Equações 7.157 e 7.159, encontraremos

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (7.160)$$

equações do movimento de Hamilton

$$-\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (7.161)$$

e

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.162)$$

Além disso, usando as Equações 7.160 e 7.161 na Equação 7.157, cada termo nos parênteses desaparece, e seguirá que

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7.163)$$

As Equações 7.160 e 7.161 são **equações de movimento de Hamilton**<sup>†</sup>. Devido a aparente simetria, elas são também conhecidas como **equações de movimentos canônicas**. A descrição do movimento por estas equações é denominado **dinâmica Hamiltoniana**.

A Equação 7.163 expressa o fato que se  $H$  não expressar o tempo contido explicitamente, então a Hamiltoniana é uma quantidade conservada. Vimos anteriormente (Seção 7.9) que a Hamiltoniana é igual à energia total  $T + U$  se a energia potencial é independente da velocidade e as equações de transformação entre  $x_{\alpha,i}$  e  $q_j$  não contenham o tempo explicitamente. De acordo com essas condições, e se  $\partial H/\partial t = 0$ , então  $H = E = \text{constante}$ .

Há  $2s$  equações canônicas e elas substituem as  $s$  equações de Lagrange. (Lembre que  $s = 3n - m$  é o número de graus de liberdade de um sistema). Mas as equações canônicas são equações diferenciais de *primeira ordem*, enquanto que as equações de Lagrange são de *segunda ordem*<sup>‡</sup>. Para o uso das equações na solução de problemas, primeiramente devemos construir a Hamiltoniana como uma função das coordenadas generalizadas e momentos. Podem ser possíveis em alguns exemplos para fazer isto diretamente. Nos casos mais complicados, pode ser necessário primeiro construir a Lagrangeana e então calcular os momentos generalizados de acordo com a Equação 7.151. As equações de movimento são então dadas pelas equações canônicas.

\*As suposições implícitas contidas neste procedimento serão examinadas na seção seguinte.

<sup>†</sup>Este conjunto de equações primeiramente obtidas por Lagrange em 1809, e Poisson também derivada das equações similares no mesmo ano. Mas outros reconhecem as equações como um conjunto básico de equações de movimento. Este ponto foi realizado primeiramente por Cauchy em 1831. Hamilton primeiramente derivou as equações em 1834 de um princípio variacional fundamental e fez então a base para uma abrangente teoria da dinâmica. Assim, as designações das equações de Hamilton são completamente merecidas.

<sup>‡</sup>Este não é um resultado especial; qualquer conjunto de  $s$  equações de segunda ordem podem sempre substituir um conjunto de  $2s$  para equações de primeira ordem.

**EXEMPLO 7.11**

Use o método Hamiltoniano para encontrar as equações de movimento de uma partícula de massa  $m$  limitada a se mover sobre uma superfície de um cilindro definido por  $x^2 + y^2 = R^2$ . A partícula está sujeita a uma força direcionada para a origem e proporcional a distância da partícula desde a origem:  $F = -kr$ .

**Solução:** A situação é ilustrada na Figura 7-9. O potencial correspondente a força  $F$  é

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \end{aligned} \quad (7.164)$$

Podemos escrever o quadrado da velocidade em coordenadas cilíndricas (ver a Equação 1.101) como

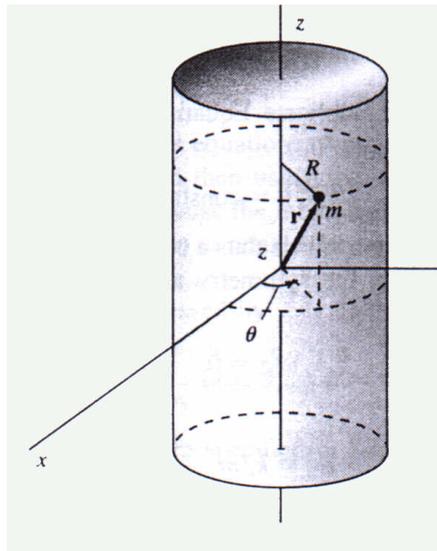
$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \quad (7.165)$$

Mas neste caso,  $R$  é uma constante, assim a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (7.166)$$

Podemos agora escrever a lagrangeana como

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \quad (7.167)$$



**FIGURA 7-9**

As coordenadas generalizadas são  $\theta$  e  $z$ , e o momentos generalizados são

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad (7.168)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (7.169)$$

Como o sistema é conservativo e como as equações de transformação entre as coordenadas retangulares e cilíndricas não envolvem explicitamente o tempo, a Hamiltoniana  $H$  é exatamente a energia total expressa em termos das variáveis  $\theta$ ,  $p_{\theta}$ ,  $z$ , e  $p_z$ . Mas  $\theta$  não ocorre explicitamente, assim

$$\begin{aligned} H(z, p_{\theta}, p_z) &= T + U \\ &= \frac{p_{\theta}^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 \end{aligned} \quad (7.170)$$

Onde o termo constante  $\frac{1}{2}kR^2$  foi retirado. As equações de movimento são, portanto, obtidas pelas equações canônicas:

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (7.171)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \quad (7.172)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad (7.173)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad (7.174)$$

As Equações 7.173 e 7.174 apenas duplicam as Equações 7.168 e 7.169. As Equações 7.168 e 7.171 dão

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} = \text{constante} \quad (7.175)$$

O momento angular em torno do eixo  $z$  é desta forma uma constante de movimento. Este resultado é assegurado, porque o eixo  $z$  é o eixo de simetria do problema. Combinando as Equações 7.169 e 7.172, encontramos

$$\ddot{z} = \omega_0^2 z = 0 \quad (7.176)$$

onde

$$\omega_0^2 = k/m \quad (7.177)$$

O movimento na direção  $z$  é portanto harmônico simples.

FIM DO EXEMPLO 7.11

As equações de movimento do problema anterior podem também serem estabelecidas pelo método de Lagrange usando a função  $L$  definida pela Equação 7.167. Neste caso, as equações de Lagrange de movimento são mais fáceis de se obter do que as equações canônicas. De fato, é freqüentemente mais adequado lidar com que o método de Lagrange para obter as equações de movimento do que o método Hamiltoniano. Mas como possuímos grande liberdade na escolha das variáveis para formulação Hamiltoniana do problema (o  $q_k$  e o  $p_k$  são independentes, enquanto que o  $q_k$  e o  $\dot{q}_k$  não são), com freqüência obtemos uma certa vantagem prática usando o método Hamiltoniano. Por exemplo, na mecânica celeste—particularmente no evento que os movimentos estão sujeitos a perturbações por influência de outros corpos—se mostra mais conveniente formular o problema em termos da dinâmica Hamiltoniana. Falando de forma geral, todavia, o grande poder da aproximação Hamiltoniana para a dinâmica não se manifesta em si para simplificar as soluções de problemas em mecânica; além disso, ela fornece uma base que podemos estender para outros campos.

A coordenada generalizada  $q_k$ , e o momento generalizado  $p_k$ , são quantidades **canonicamente conjugados**. De acordo com as Equações 7.160 e 7.161, se  $q_k$  não aparecer na Hamiltoniana, então  $\dot{p}_k = 0$ , e o momento conjugado  $p_k$  é uma constante de movimento. Coordenadas que não aparecem explicitamente nas expressões para  $T$  e  $U$  são ditas *cíclicas*. Uma coordenada cíclica em  $H$  também é cíclica em  $L$ . Mas, se  $q_k$  não aparecer em  $L$ , a velocidade generalizada  $\dot{q}_k$  relacionada a essa coordenada é em geral ainda presente. Assim

$$L = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

e não efetuamos nenhuma redução no número de graus de liberdade do sistema, mesmo apesar de ser uma coordenada cíclica; temos ainda  $s$ -equações de segunda ordem para serem resolvidas. Todavia, na formulação canônica, se  $q_k$  é cíclica,  $p_k$  é constante  $p_k = \alpha_k$  e

$$H = H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_k, p_1, \dots, p_{k-1}, \alpha_k, p_{k+1}, \dots, p_s, t)$$

Assim, nós temos  $2s - 2$  equações de primeira ordem para resolver, e neste problema foi, de fato, reduzido em complexidade; existem de fato apenas  $s - 1$  graus de liberdade. A coordenada  $q_k$  está completamente separada, e ela é *ignorável* até na medida que o restante do problema está

relacionado. Calculamos a constante  $\alpha_k$  para aplicar a condição inicial, e a equação do movimento para coordenada cíclica é

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = \omega_k \tag{7.178}$$

a qual podemos integrar imediatamente para produzir

$$q_k(t) = \int \omega_k dt \tag{7.179}$$

A solução para uma coordenada cíclica é portanto trivial para reduzir para quadratura. Consequentemente, a fórmula canônica de Hamilton é particularmente bem adaptada para lidar com problemas nos quais durante uma ou mais coordenadas são cíclicas. A mais simples solução possível para um problema resultará se o problema pode ser formulado de tal maneira que *todas* as coordenadas são cíclicas. Então, cada coordenada pode ser descrita em uma maneira trivial assim como na Equação 7.179. Isto é, de fato, possível encontrar transformações que convertam todas as coordenadas cíclicas\* e estes procedimentos conduzem naturalmente para a formulação da dinâmica particularmente útil na construção de modernas teorias da matéria. A discussão geral desses tópicos, entretanto, está fora do escopo deste livro†.

**EXEMPLO 7.12** .....

**Usando o método Hamiltoniano, encontre as equações de movimento de um pêndulo esférico de massa  $m$  e comprimento  $b$  (veja Figura 7-10).**

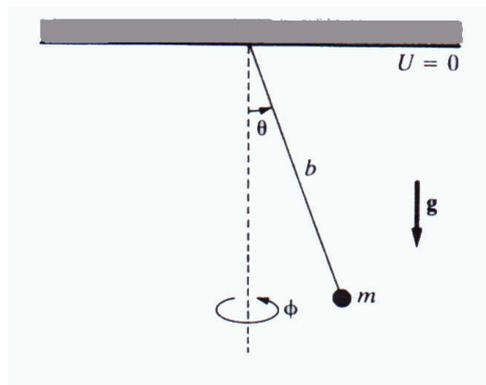
**Solução:** As coordenadas generalizadas são  $\theta$  e  $\phi$ . A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

A única força agindo no pêndulo (além da que atua no ponto de suporte) é gravitacional, e definimos o potencial zero como sendo no ponto de de suporte do pêndulo

$$U = -mgb \cos \theta$$

Os momentos generalizados são então



**FIGURA 7-10**

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} \tag{7.180}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mb^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \tag{7.181}$$

\*Transformações deste tipo são derivadas de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Jacobi investigou vastamente expandindo os benefícios do método de Hamilton, e este desenvolvimento é conhecido como *Teorema Hamilton-Jacobi*

†Olhe, por exemplo, Goldstein (Go80, Chapter 10).

Podemos resolver as Equações 7.180 e 7.181 para  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\phi}$  em termos de  $p_\theta$  e  $p_\phi$ .

Nos determinamos a Hamiltoniana pela Equação 7.155 ou de  $H = T + U$  (porque aplica-se as condições das Equações 7.130)

$$\begin{aligned} H &= T + U \\ &= \frac{1}{2}mb^2 \frac{p_\theta^2}{(mb^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{mb^2 \sin^2 \theta p_\phi^2}{(mb^2 \sin^2 \theta)^2} - mgb \cos \theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2mb^2} + \frac{p_\phi^2}{2mb^2 \sin^2 \theta} - mgb \cos \theta \end{aligned}$$

As equações de movimentos são

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mb^2} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mb^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\theta^2 \cos \theta}{mb^2 \sin^3 \theta} - mgb \sin \theta \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

Como  $\phi$  é cíclica, o momento  $\theta$  em torno do eixo de simetria é constante.

..... **FIM DO EXEMPLO 7.12**

## 7.11 ALGUNS COMENTÁRIOS A RESPEITO DAS VARIÁBEIS DINÂMICAS E CÁLCULOS VARIACIONAIS EM FÍSICA

Originalmente obtemos as equações de movimento de Lagrange declarando o Princípio de Hamilton como uma integral variacional e então usamos os resultados do capítulo precedente a respeito do cálculo para a variações. Como o método e a aplicação estão relacionados separadamente, isto é possivelmente vale a pena reiniciar o argumento de uma maneira bem comportada mas abreviada.

O Princípio de Hamilton é expresso por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \quad (7.182)$$

Aplicando o processo variacional especificado no Secção 6.7, teremos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = 0$$

Depois, iremos declarar que  $\delta q_j$  e  $\delta \dot{q}_j$  não são independentes, assim a operação variacional e a diferenciação no tempo podem intercambiar:

$$\partial \dot{q}_j = \delta \left( \frac{dq_j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q_j \quad (7.183)$$

A integral variada torna-se (depois da integração por partes na qual o conjunto das  $\delta q_j$  são igual a zero nos pontos extremos finais)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt = 0 \quad (7.184)$$

A solicitação que  $\delta q_j$  seja independente de variações fornece imediatamente as equações de Lagrange.

No princípio de Hamilton, expresso pela integral variacional na Equação 7.182, a Lagrangeana é uma função das coordenadas generalizadas e das velocidades generalizadas. Mas somente as  $q_j$  são consideradas como variáveis independentes; as velocidades generalizadas são simplesmente as derivadas no tempo das  $q_j$ . Quando a integral é reduzida para a forma dada pela Equação 7.184, declaramos que  $\delta q_j$  são variações independentes; deste modo o integrando deve anular-se identicamente, e resultam nas equações de Lagrange. Podemos desta forma propor esta questão: como o movimento dinâmico de um sistema é determinado completamente pelas condições iniciais, qual é o significado das variações  $\delta q_j$ ? Possivelmente uma resposta suficiente é que as variáveis podem ser consideradas geometricamente dentro dos limites de certos vínculos—apesar de que não são dinamicamente possíveis; isto é, quando usamos o método variacional para obter a equação de Lagrange, é conveniente ignorar temporariamente o fato que estamos lidando com um sistema físico cujo movimento é completamente determinado e não sujeito variações e considerar ao em vez somente uma abstração matemática para o problema. Realmente, este é o o espírito no qual cada cálculo variacional relacionado a um processo físico deve ser encarado. Adotando este ponto de vista, não devemos dar excessiva importância ao fato que o método variacional pode contrariar certas propriedades físicas conhecidas para o sistema. ( Por exemplo, energia é geralmente não conservada na passagem do caminho verdadeiro para o caminho das variações.) Um cálculo variacional simplesmente testa várias *soluções possíveis* para um problema e determina um método para selecionar a *correta* solução.

A equação canônica para o movimento pode também ser obtida diretamente do cálculo variacional baseado no assim chamado **Princípio modificado de Hamilton**. A função Lagrangeana pode ser expressa assim (veja Equação 7.153):

$$L = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \quad (7.185)$$

e a declaração do princípio de Hamilton contida na Equação 7.182 pode ser modificada para ler

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_j p_j \dot{q}_j - H \right) dt = 0 \quad (7.186)$$

Levando a variação na forma padrão, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left( p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt = 0 \quad (7.187)$$

Na formulação Hamiltoniana, as  $q_j$  e os  $p_j$  são considerados independentes. As  $\dot{q}_j$  são novamente não independentes das  $q_j$ , assim a Equação 7.183 pode ser usada para expressar o primeiro termo da Equação 7.187 como

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt$$

Integrando por partes, o termo integrado desaparece, e temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \delta \dot{q}_j dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \dot{p}_j \delta q_j dt \quad (7.188)$$

A Equação 7.187 então fica

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left\{ \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \left( \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt = 0 \quad (7.189)$$

Se  $\delta q_j$  e  $\delta p_j$  representam *variações independentes*, os termos em parênteses devem desaparecer separadamente e resulta na equação canônica de Hamilton.

Na seção anterior, obtemos as equações canônicas por duas diferentes expressões escritas para a diferencial total da Hamiltoniana (Equação 7.157 e 7.159) e então igualamos os coeficientes de  $dq_j$  e  $dp_j$ . Tal procedimento é válido se as  $q_j$  e os  $p_j$  forem variáveis independentes. Deste modo, ambos

na derivação anterior e no cálculo variacional anterior, obtidos as equações canônicas explorando a natureza independente das coordenadas generalizadas e dos momentos generalizados.

As coordenadas e os momentos não são realmente “independentes” no verdadeiro sentido da palavra. Para se a dependência do tempo cada uma das coordenadas é conhecida,  $q_j = q_j(t)$ , o problema está completamente resolvido. As velocidades generalizadas podem ser calculadas de

$$\dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt}q_j(t)$$

e os momento generalizados são

$$p_j = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

O ponto essencial é que, enquanto que as  $q_j$  e os  $\dot{q}_j$  estão relacionados por uma simples derivada no tempo *independente da maneira na qual o sistema se comporta*, a conexão entre as  $q_j$  e os  $p_j$  são as *equações de movimento em si*. Encontrando as relações que conectam as  $q_j$  e os  $p_j$  (e por meio disso eliminar a assumida independência destas quantidades) é então equivalente a resolver o problema.

### 7.12 ESPAÇO DE FASE E TEOREMA DE LIOUVILLE (OPCIONAL)

Apontamos anteriormente que as coordenadas generalizadas  $q_j$  podem ser usadas para definir um *espaço de configuração* de  $s - -$  dimensões com cada ponto representando um certo estado do sistema. Similarmente, os *momentos generalizados*  $p_j$  definem um *espaço de momentos* de  $s - -$  dimensões com cada ponto representando uma certa condição do movimento do sistema. Um dado ponto na configuração espacial especifica apenas a posição de cada partícula no sistema; nada pode ser concluído com respeito ao movimento das partículas. O contrário é verdade para o momento espacial. No Capítulo 3, encontramos sua eficácia para representar geometricamente a dinâmica dos sistemas oscilatórios simples por meio do diagrama de fases. Se usarmos este conceito em sistemas dinâmicos mais complicados, então um espaço  $2s - -$  dimensional consistindo de  $q_j$  e dos  $p_j$  permite-nos representar ambos, posições e momentos para todas as partículas. Esta generalização é chamada de **espaço Hamiltoniano de fase** ou, simplesmente **espaço de fase**.\*

**EXEMPLO 7.13** .....

Contra o diagrama de fase para a partícula do Exemplo 7.11.

**Solução:** A partícula possui dois graus de liberdade  $(\theta, z)$ , assim o espaço de fase para este exemplo é realmente de quatro dimensões:  $\theta, p_\theta, z, p_z$ . Mas  $p_\theta$  é constante e portanto pode ser suprimido. Na direção  $z$ , o movimento é harmônico simples, e então a projeção sobre o plano  $z - p_z$  do caminho de fase para cada energia total  $H$  é apenas uma elipse. Como  $\dot{\theta} = constante$ , o caminho de fase deve representar um movimento crescendo uniformemente com  $\theta$ . Portanto, o caminho de fase em qualquer superfície  $H = constante$  é um **espiral elíptico uniforme**.

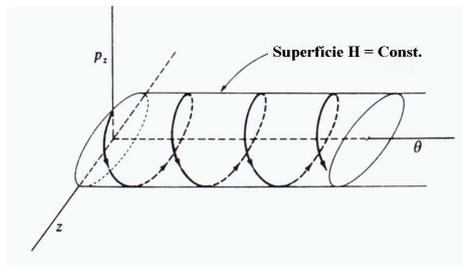


FIGURA 7-11

**FIM DO EXEMPLO 7.13**

\*Anteriormente plotamos nos diagramas de fases a posição versus a quantidade proporcional a velocidade. No espaço de fase Hamiltoniano, esta última quantidade torna-se o momento generalizado.

Se, em um dado tempo, a posição e os momentos de todas as partículas em um sistema são conhecidas, então com esses valores como condições iniciais, o movimento subsequente do sistema é completamente determinado; isto é, começando de um ponto  $q_j(0), p_j(0)$  no espaço de fase, o ponto representativo que descreve o sistema move-se sobre um único caminho de fase. Em princípio, este procedimento pode sempre ser feito e assim obter-se uma solução. Mas se o número de graus de liberdade do sistema é grande, o conjunto de equações de movimento deverá ser muito complicado de ser resolvido. Mais ainda, para sistemas complexos, como uma quantidade de gás, é praticamente impossível de se determinar as condições iniciais de cada molécula constituinte. Como não podemos identificar nenhum ponto particular no espaço de fase que represente as condições reais em um dado tempo, devemos nos utilizar de alguma aproximação alternativa para estudar a dinâmica desses sistemas. Então chegamos ao ponto de partida da mecânica estatística. A formulação Hamiltoniana das dinâmicas é ideal para o estudo estatístico de sistemas complexos. Demonstramos isto em parte provando agora um teorema que é fundamental para estas investigações.

Para um grande conjunto de partículas—digamos, moléculas de gás—não podemos identificar corretamente o ponto particular no espaço de fase que irá representar o sistema. Mas podemos preencher o espaço de fase com um conjunto de pontos, cada um representando uma possível condição do sistema; que seria, imaginamos um grande número de sistemas (cada um consistente com vínculos conhecidos), cada um dos quais poderia concebidamente ser o real sistema. Como não estamos aptos a discutir os detalhes dos movimentos das partículas no sistema, substituímos a discussão de um conjunto (*ensemble*) de sistemas equivalentes. Cada ponto representativo no espaço de fase corresponde a um único sistema do conjunto, e o movimento de um ponto particular representa o movimento independente do sistema. Então, dois caminhos de fase nunca deverão se cruzar.

Devemos considerar os pontos representativos sendo suficientemente numerosos que possamos definir uma *densidade na fase*  $\rho$ . Os elementos de volume do espaço de fase que definem a densidade devem ser suficientemente grandes para conter um vasto número de pontos representativos, mas também devem ser suficientemente pequenos para que a densidade varie continuamente. O número  $N$  de sistemas cujos pontos representativos ficam dentro do volume  $dv$  do espaço de fase é

$$N = \rho dv \quad (7.190)$$

onde

$$dv = dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s \quad (7.191)$$

Como antes,  $s$  é o número de graus de liberdade de cada sistema no conjunto (*ensemble*). Considere um elemento de área no plano  $q_k - p_k$  no espaço de fase (Figura 7-12). O número de pontos representativos movendo-se através da fronteira esquerda para o interior da área por unidade de tempo é

$$\rho \frac{dq_k}{dt} dp_k = \rho \dot{q}_k dp_k$$

e o número movendo-se sobre a fronteira inferior para o interior da área por unidade de tempo é

$$\rho \frac{dp_k}{dt} dq_k = \rho \dot{p}_k dq_k$$

tal que o número total de pontos representativos movendo-se *para o interior* da área  $dq_k dp_k$  por unidade de tempo é

$$\rho(\dot{q}_k dp_k + \dot{p}_k dq_k) \quad (7.192)$$

Por uma expansão em série de Taylor, o número de pontos representativos movendo-se *para fora* da área por unidade de tempo é (aproximadamente):

$$\left[ \rho \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) dq_k \right] dp_k + \left[ \rho \dot{p}_k + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) dp_k \right] dq_k \quad (7.193)$$

Portanto, o acréscimo total na densidade em  $dq_k dp_k$  por unidade de tempo é a diferença entre as Equações 7.192 e 7.193:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dq_k dp_k = - \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (\rho \dot{p}_k) \right] dq_k dp_k \quad (7.194)$$

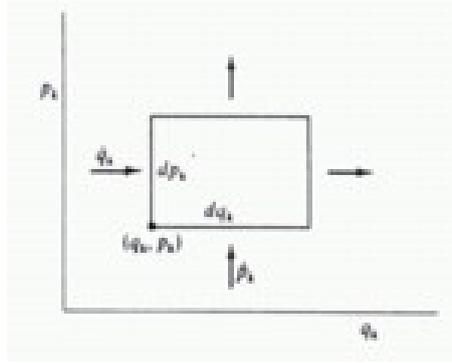


FIGURA 7-12

Depois dividindo-se por  $dq_k dp_k$  e somando esta expressão sobre todos os possíveis valores de  $k$ , encontramos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \dot{q}_k + \rho \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \dot{p}_k + \rho \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) = 0 \quad (7.195)$$

Da equação de Hamilton (Equações 7.160 e 7.161), temos (se as segundas derivadas parciais de  $H$  são contínuas)

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = 0 \quad (7.196)$$

assim a Equação 7.195 torna-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) = 0 \quad (7.197)$$

Mas este é apenas a derivada total em relação ao tempo de  $\rho$ , assim concluímos que

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0} \quad (7.198)$$

Este importante resultado, conhecido como **Teorema de Liouville**,\* afirma que a densidade de pontos representativos no espaço de fase correspondente ao movimento de um sistema de partículas continua constante durante o movimento. Deve ser enfatizado que estamos aptos a estabelecer a invariância da densidade  $\rho$  somente porque o problema foi formulado no *espaço de fase*; um teorema equivalente para espaço de configuração não existe. Portanto, devemos usar a dinâmica Hamiltoniana (mais que a dinâmica Lagrangeana) para discutir conjuntos (*ensemble*) na mecânica estatística.

O teorema de Liouville é importante não somente para agregados de partículas microscópicas, como na mecânica estatística de sistemas gasosos e focalizando as propriedades de aceleradores de partículas carregadas, mas também em certos sistemas macroscópicos. Por exemplo, na dinâmica estelar, o problema é invertido e estudando-se a função de distribuição  $\rho$  das estrelas da galáxia, o potencial  $U$  do campo gravitacional galáctico pode ser inferido.

### 7.13 TEOREMA DO VIRIAL (OPCIONAL)

Outro importante resultado de uma natureza estatística é digno de ser mencionado. Considere um conjunto de partículas em que os vetores posição  $r_\alpha$  e de momento  $p_\alpha$  são ambos limitados (i.e., permanecem finitos para qualquer valor no tempo). Definindo a grandeza

$$S \equiv \sum_{\alpha} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha \quad (7.199)$$

\*publicado em 1838 por Joseph Liouville (1809-1882).

A derivada de  $S$  em função do tempo é

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{\alpha} (\mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha}) \tag{7.200}$$

Se calculamos o valor médio de  $dS/dt$  num intervalo de tempo  $\tau$ , encontramos

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dS}{dt} dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} \tag{7.201}$$

Se o movimento do sistema for periódico—e se  $\tau$  for um algum múltiplo inteiro do período—então  $S(t) = S(0)$ , e  $\langle \dot{S} \rangle$  desaparece. Mas, mesmo que o sistema não demonstre nenhuma periodicidade, então—como  $S$  é por hipótese uma função limitada—podemos tornar  $\langle \dot{S} \rangle$  tão pequeno quanto desejarmos admitindo o tempo  $\tau$  tornando-se suficientemente longo. Portanto, o tempo médio do lado direito da Equação 7.201 sempre deverá desaparecer (ou pelo menos se aproximar de zero). Assim, em seu limite, temos

$$\left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \times \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \tag{7.202}$$

No lado esquerdo desta equação,  $\mathbf{p}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$  é o dobro da energia cinética. Do lado direito,  $\dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$  é somente a força  $\mathbf{F}_{\alpha}$  sobre a  $\alpha$ -ésima partícula. Assim,

$$\left\langle 2 \sum_{\alpha} T_{\alpha} \right\rangle = - \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle \tag{7.203}$$

O somatório em  $T_{\alpha}$  será a energia total do sistema, então temos o resultado geral, dado por

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle} \tag{7.204}$$

O lado direito desta equação foi chamado por Clausius\* o **virial** do sistema, e do **teorema do virial** declara que a *energia cinética média de um sistema de partículas é igual ao seu virial*.

**EXEMPLO 7.14** .....

Considere um gás ideal que possui  $N$  átomos contido num volume  $V$ , pressão  $P$ , e temperatura absoluta  $T_1$  (não confundir com a energia cinética  $T$ ). Use o teorema do virial para derivar a equação de estado para um gás perfeito.

**Solução:** De acordo o teorema da equipartição, a energia cinética média, para cada átomo de um gás ideal, é igual a  $3/2kT_1$ , onde  $k$  é a constante de Boltzmann. A energia cinética media total será

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} NkT_1 \tag{7.205}$$

O lado direito do teorema virial (Equação 7.204) possui as forças  $\mathbf{F}_{\alpha}$ . Para um gás ideal, não ocorrem forças de interação entre os átomos. A única força que aparece é representada pela pressão das paredes do recipiente. Os átomos batem elasticamente nas paredes, que por sua vez exerce uma pressão sobre os átomos.

Como a pressão é força por unidade de área, encontramos a diferencial instantâneo da força sobre um diferencial de área, logo

$$d\mathbf{F}_{\alpha} = -\mathbf{n}PdA \tag{7.206}$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície  $dA$  e aponta para fora. O lado direito do teorema virial será, então

$$-\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{r}_{\alpha} \right\rangle = \frac{P}{2} \int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA \tag{7.207}$$

\*Rudolph Julius Emmanunel Clausius (1822-1888), físico alemão e um dos fundadores da Termodinâmica.

Usando o teorema do divergente a fim de relacionar a integral de superfície com a integral de volume.

$$\int \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} dA = \int \nabla \cdot \mathbf{r} dV = 3 \int dV = 3V \quad (7.208)$$

O teorema virial resulta em

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} NkT &= \frac{3PV}{2} \\ NkT &= PV \end{aligned} \quad (7.209)$$

que é a lei para um gás ideal.

FIM DO EXEMPLO 7.14

Se as forças  $\mathbf{F}_\alpha$  podem ser derivadas dos potenciais  $U_\alpha$ , a Equação 7.204 deve ser reescrita como

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \cdot \nabla U_{\alpha} \right\rangle \quad (7.210)$$

No caso particular em que duas partículas interagem de acordo com a lei da potência das forças centrais:  $F \propto r^n$ . Então, o potencial assume a forma

$$U = Kr^{n+1} \quad (7.211)$$

Portanto

$$\mathbf{r} \cdot \nabla U = r \frac{dU}{dr} = k(n+1)r^{n+1} = (n+1)U \quad (7.212)$$

e o teorema virial torna-se

$$\langle T \rangle = \frac{n+1}{2} \langle U \rangle \quad (7.213)$$

Se as partículas possuírem uma interação gravitacional, então  $n = -2$ , e

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle, \quad n = -2$$

Esta relação será útil em cálculos, por exemplo, das energias dos planetas em movimento.

## PROBLEMAS

**7-1.** Um disco rola sem deslizar sobre um plano horizontal. O plano do disco permanece na vertical, mas ele está livre para rodar sobre o eixo vertical. Em que coordenadas podemos descrever este movimento? Escreva a equação diferencial que descreve o vínculo de rolamento. Esta equação é integrável? Justifique sua resposta com argumentos físicos. O vínculo é holonômico?

**7-2.** Resolva o Exemplo 7.6 mostrando todos os passos, em particular aqueles destacados nas Equações 7.36 e 7.41. Explique porque o sinal da aceleração não afeta a frequência  $\omega$ . Encontre um argumento que explique o porque dos sinais de  $a^2$  e  $g^2$  na solução de  $\omega^2$  na Equação 7.42 serem os mesmos.

**7-3.** Uma esfera de raio  $\rho$  está vinculada a rolar sem deslizar na metade da parte de baixo da superfície interna de um cilindro oco de raio interno  $R$ . Determine a função Lagrangiana, a equação de vínculo, e as equações de Lagrange para o movimento. Encontre a menor frequência de oscilação.

**7-4.** Uma partícula se move num plano sob a influência de uma força  $f = -Ar^{\alpha-1}$  cuja direção passa pela origem;  $A$  e  $\alpha (> 0)$  são constantes. Escolha um sistema de coordenadas apropriado, e tome a energia potencial igual a zero na origem. Encontre a equação Lagrangiana para o movimento. O momento angular na origem é conservado? A energia total é conservada?

**7-5.** Considere um plano vertical em um campo gravitacional constante. Tome a origem do eixo de coordenadas do sistema localizado em algum ponto neste plano. Uma partícula de massa  $m$  move-se num plano vertical sobre a influência da gravidade e de uma força adicional  $f = -Ar^{\alpha-1}$  na direção da origem ( $r$  é a distância a partir da origem;  $A$  e  $\alpha$  [ $\neq 0$  ou  $1$ ] são constantes). Escolha as coordenadas generalizadas apropriadas, e encontre a equação Lagrangeana para o movimento. O momento angular em torno da origem é conservado? Explique.

**7-6.** Um arco de massa  $m$  e raio  $R$  desce rolando sem deslizar num plano inclinado de massa  $M$ , que possui um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. Encontre a equação Lagrangeana e a integral do movimento se o plano puder deslizar sem atrito ao longo da superfície horizontal.

**7-7.** Um pêndulo duplo formado por dois pêndulos simples, com um dos pêndulos suspenso pela extremidade do outro (*obs.: este é o pêndulo duplo visto em aula*). Se os dois pêndulos tiverem comprimentos iguais e possuindo massas iguais massa e se ambos os pêndulos forem forçados a se moverem no mesmo plano, encontre as equações de Lagrange para o movimento do sistema. Não suponha ângulos pequenos.

**7-8.** Considere uma região do espaço dividida por um plano. A energia potencial de uma partícula na região 1 é  $U_1$  e na região 2 é  $U_2$ . Se uma partícula da massa  $m$  e com velocidade  $v$  na região 1 passar da região 1 à região 2 tal que seu trajeto na região 1 faça um ângulo  $\theta$  com a normal ao plano da separação e um ângulo  $\theta_2$  com o normal quando na região 2, mostre que

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \left(1 + \frac{U_1 - U_2}{T_1}\right)^{1/2}$$

onde  $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ . Qual é o análogo óptico deste problema?

**7-9.** Um disco da massa  $M$  e do raio  $R$  rola sem deslizar num plano inclinado que faz com a horizontal um ângulo  $\alpha$ . O disco tem um pequeno eixo sem peso e de raio desprezível. Desta eixo é suspenso um pêndulo simples do comprimento  $\ell < R$  e cujo o prumo (objeto) tem uma massa  $m$ . Considere que o movimento do pêndulo ocorre no plano do disco, e encontre equações de Lagrange para o sistema.

**7-10.** Dois blocos, cada um da massa  $M$ , são conectados por um pequeníssimo cordão inextensível e uniforme do comprimento  $\ell$ . Um bloco é colocado sobre uma superfície horizontal lisa, e o outro bloco pendurado sobre um dos lados, o cordão passa sobre uma polia de pequeníssima fricção. Descreva o movimento do sistema **(a)** quando a massa da corda é desprezível e **(b)** quando a corda tem uma massa  $m$ .

**7-11.** Uma partícula da massa  $m$  é obrigada a mover-se em um círculo do raio  $R$ . O círculo gira no espaço em torno de um ponto sobre o círculo, que é fixo. A rotação ocorre no plano do círculo e com velocidade angular constante  $\omega$ . Na ausência de uma força gravitacional, mostre que o movimento das partículas fazem em torno de uma das extremidades de um diâmetro que passa através do ponto de pivô e o centro do círculo é o mesmo que aquele de um pêndulo plano em um campo gravitacional uniforme. Explique porque este é um resultado razoável.

**7-12.** Uma partícula massa  $m$  está em repouso um plano liso. O plano é levantado com um ângulo de inclinação  $\theta$  em uma taxa constante  $\alpha$  ( $\theta = 0$  em  $t = 0$ ), fazendo com que a partícula mova-se plano abaixo. Determine o movimento da partícula.

**7-13.** Um pêndulo simples do comprimento  $b$  e com um prumo de massa  $m$  é amarrado num suporte de massa desprezível que move-se horizontalmente com aceleração constante  $a$ . Determine **(a)** as equações do movimento e **(b)** o período para oscilações pequenas.

**7-14.** Um pêndulo simples do comprimento  $b$  e do prumo com massa  $m$  é unido a uma sustentação massless que move-se verticalmente para cima com aceleração constante  $a$ . Determine **(a)** as equações do movimento e **(b)** o período para oscilações pequenas.

**7-15.** Um pêndulo simples consiste em uma massa  $m$  suspensa por uma mola de massa desprezível e com comprimento não estendido  $b$  e constante de  $k$ . Encontre as equações de Lagrange do movimento.

**7-16.** O ponto da sustentação de um pêndulo simples da massa  $m$  e de comprimento  $b$  é conduzido horizontalmente por  $x = a \sin \omega t$ . Encontre a equação do movimento do pêndulo.

**7-17.** Uma partícula da massa  $m$  pode deslizar livremente ao longo de um fio  $AB$  cuja a distância perpendicular à origem  $O$  seja  $h$  (veja a Figura 7-A). A linha  $OC$  gira sobre a origem com uma velocidade angular constante  $\dot{\theta} = \omega$ . A posição da partícula pode ser descrita em termos do ângulo  $\theta$  e a distância  $q$  ao ponto  $C$ . Se a partícula for sujeita a uma força gravitacional, e se as condições iniciais forem

$$\theta(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0$$

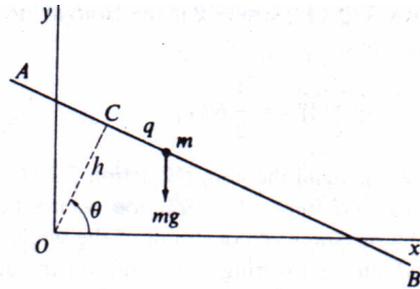


FIGURA 7-A

mostre que a dependência temporal da coordenada  $q$  é:

$$q(t) = \frac{g}{2\omega^2} (\cosh \omega t - \cos \omega t)$$

Esboce este resultado. Calcule a Hamiltoniana para o sistema, e compare-a com a energia total. A energia total é conservada?

**7-18.** Um pêndulo é construído unindo uma massa  $m$  a uma corda inextensível de comprimento  $l$ . A extremidade superior da corda é conectada ao ponto  $o$  mais alto em um disco vertical do raio  $R$  ( $R < l/\pi$ ) como na Figura 7-B. Obtenha a equação de movimento do pêndulo, e encontre a frequência para pequenas oscilações. Encontre a linha em torno da qual o movimento angular estende igualmente também a outra direção (isto é,  $\theta_1 = \theta_2$ ).

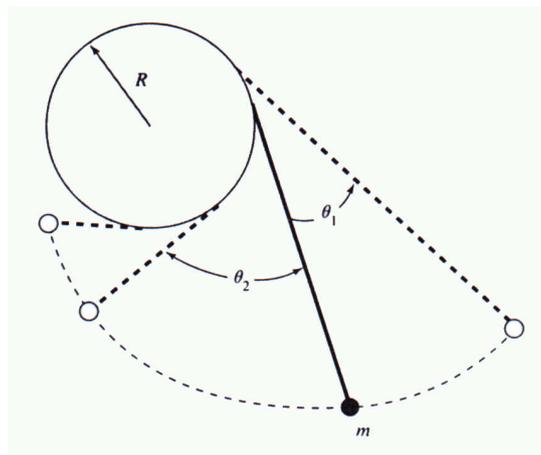


FIGURA 7-B

**7-19.** Duas massas  $m_1$  e  $m_2$  ( $m_1 \neq m_2$ ) são conectadas por uma haste rígida do comprimento  $d$  e de massa desprezível. Uma corda inextensível de comprimento  $l_1$  é unido a  $m_1$  e conectada a um ponto fixo da sustentação  $P$ . Similarmente, uma corda de comprimento  $l_2$  ( $l_1 \neq l_2$ ) conecta  $m_2$  e  $P$ . Obtenha a equação que descreve o movimento no plano de  $m_1, m_2, eP$ , e encontre a frequência para pequenas oscilações em torno da posição do equilíbrio.

**7-20.** Uma roda circular é suspensa em um plano horizontal por três cordas, cada um do comprimento  $\ell$ , que são unidas simetricamente a roda e conectadas aos pontos fixos que se encontram em um plano acima da roda. No equilíbrio, cada corda está na vertical. Mostre que a frequência de pequenas oscilações rotatórias em torno da vertical através do centro da roda é a mesma que aquela para um pêndulo simples do comprimento  $\ell$ .

**7-21.** Uma partícula é confinada a mover-se (sem atrito) sobre um fio circular que gira com velocidade angular constante  $\omega$  em torno de um diâmetro vertical. Encontre a posição do equilíbrio da partícula, e calcule a frequência para pequenas oscilações em torno desta posição. Encontre e interprete fisicamente uma velocidade angular crítica  $\omega = \omega_c$  que divide o movimento das partículas em dois tipos distintos. Construa diagramas de fase para os dois casos  $\omega < \omega_c$  e  $\omega > \omega_c$ .

**7-22.** Uma partícula da massa move-se em uma dimensão sob a influência de uma força

$$F(x, t) = \frac{k}{x^2} e^{-(t/\tau)}$$

onde  $k$  e  $\tau$  são constantes positivas. Compute as funções Lagrangeana e Hamiltoniana. Compare a Hamiltoniana e a energia total do sistema, discuta a conservação de energia para o sistema.

**7-23.** Considere uma partícula da massa  $m$  que move-se livremente num campo de forças conservativo cuja a função potencial seja  $U$ . Encontre a função Hamiltoniana, e mostre que as equações canônicas do movimento se reduzem às equações de Newton. (Use coordenadas retangulares.)

**7-24.** Considere um pêndulo simples num plano consistindo em uma massa  $m$  unida a uma corda do comprimento  $\ell$ . Após o pêndulo entrar em movimento, o comprimento da corda é encurtado a uma taxa constante

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = \text{constante}$$

O ponto de suspensão permanece fixo. Encontre as funções Lagrangeana e Hamiltoniana. Compare a Hamiltoniana com a energia total, e discuta a conservação de energia para o sistema.

**7-25.** Uma partícula da massa  $m$  move-se sob a influência da gravidade ao longo do espiral  $z = k\theta$ ,  $r = \text{constante}$ , onde  $k$  é uma constante e  $z$  é vertical. Obtenha as equações Hamiltonianas do movimento.

**7-26.** Determine as Hamiltonianas e as equações de Hamilton do movimento para (a) um pêndulo simples e (b) uma simples máquina de Atwood (única polia).

**7-27.** Uma mola de massa desprezível de comprimento  $b$  e constante elástica  $k$  conectam duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ . O sistema descansa em uma tabela lisa e podem oscilar e girar.

(a) Determine equações de Lagrange do movimento.

(b) Quais são os momentos generalizados associados com cada uma das coordenadas cíclicas?

(c) Determine as equações de Hamilton do movimento.

**7-28.** Uma partícula da massa  $m$  é atraída a um centro da força com uma força do valor  $k/r^2$ . Use as coordenadas polares planas e ache as equações de Hamilton para o movimento.

**7-29.** Considere o pêndulo descrito no problema 7-15. O ponto de sustentação do pêndulo sobe verticalmente com aceleração constante  $a$ .

(a) Usando o método Lagrangeano ache a equação do movimento.

(b) Determine a Hamiltoniana e as equações de Hamilton do movimento.

(c) Qual é o período para pequenas oscilações?

**7-30.** Considere quaisquer duas funções de coordenadas e momentos generalizados  $g(q_k, p_k)$  e  $h(q_k, p_k)$ . Os **Parênteses de Poisson** são definidos por:

$$[g, h] = \sum_k \left( \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

Verifique as seguintes propriedades dos parênteses de Poisson:

- (a)  $\frac{dg}{dt} = [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t}$
- (b)  $\dot{q}_j = [q_j, H], \quad \dot{p}_j = [p_j, H]$
- (c)  $[p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, q_j] = 0$
- (d)  $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$

onde  $H$  é a Hamiltoniana. Se os parênteses de Poisson de duas quantidades se anula, as quantidades *comutam*. Se os parênteses de Poisson de duas quantidades é igual a unidade, as quantidades são ditas *cononicamente conjugados*. Mostre que qualquer quantidade que não depende explicitamente do tempo e que comuta com a Hamiltoniana é uma constante de movimento do sistema. O formalismo dos parênteses de Poisson é de importância considerável em mecânica quântica.

**7-31.** Um pêndulo esférico consiste de uma massa  $m$  presa a uma vara ideal de comprimento  $\ell$ . A extremidade oposta da vara tem um eixo livre de maneira que gire livremente em torno de algum eixo fixo (em todas as direções). Monte a função Hamiltoniana em coordenadas esféricas. (Se  $p_\phi = 0$ , o resultado é o mesmo para um pêndulo planar.) Combine o termo que depende de  $p_\phi$  com a energia potencial comum para definir a energia potencial *efetiva*  $V(\theta, p_\phi)$ . Faça um gráfico de  $V$  em função de  $\theta$  para vários valores de  $p_\phi$ , incluindo  $p_\phi = 0$ . Discuta as características do movimento apontando as diferenças entre  $p_\phi = 0$  e  $p_\phi \neq 0$ . Discuta o caso limite do pêndulo cônico ( $\theta = \text{constante}$ ) com referência ao diagrama  $V - \theta$ .

**7-32.** Uma partícula se move em um campo de força esféricamente simétrico com uma energia potencial dada por  $U(r) = -K/r$ . Calcule a função Hamiltoniana dada em coordenadas esféricas e obtenha as equações canônicas do movimento. Esquematize o caminho que um ponto representativo, para o sistema, iria seguir em uma superfície  $H = \text{constante}$  no espaço de fase. Comece mostrando que o movimento deve estar em um plano tal que o espaço de fase é um espaço quadridimensional ( $r, \theta, p_r, p_\theta$ , mas que somente os três primeiros são não-triviais). Calcule a projeção do “caminho de fase” sobre o plano  $r - p_r$ , então leve em conta a variação com  $\theta$ .

**7-33.** Determine a Hamiltoniana e as equações do movimento de Hamilton para uma máquina de Atwood dupla do Exemplo 7.8.

**7-34.** Uma partícula de massa  $m$  desliza por uma rampa circular lisa de massa  $M$ , como mostra a Figura 7-C. A rampa está colocada em uma mesa horizontal lisa. Encontre: (a) a equação do movimento de  $m$  e  $M$ ; (b) a reação da rampa sobre  $m$ .

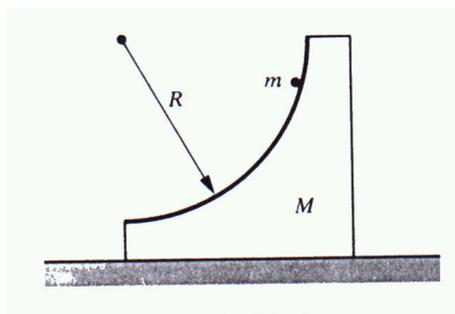


FIGURA 7-C

**7-35.** Quatro partículas são diretamente jogadas para cima em um campo gravitacional com as seguintes condições iniciais.

- (1)  $z(0) = z_0; \quad p_z(0) = p_0$
- (2)  $z(0) = z_0 + \Delta z_0; \quad p_z(0) = p_0$
- (3)  $z(0) = z_0; \quad p_z(0) = p_0 + \Delta p_0$
- (4)  $z(0) = z_0 + \Delta z_0; \quad p_z(0) = p_0 + \Delta p_0$

Mostre por cálculo direto que os pontos representativos correspondentes a esta partícula sempre definem uma área no espaço de fase igual a  $\Delta z_0, \Delta p_0$ . Esquematize o caminho de fase e mostre para vários tempos onde  $t > 0$  a forma da região cuja área permanece constante.

**7-36.** Discuta as implicações do teorema de Liouville no caso de feixes de partículas concentradas (colimadas) considerando o seguinte caso simples. Um feixe de elétrons de seção de choque circular (raio  $R_0$ ) é direcionada ao longo do eixo  $z$ . A densidade de elétrons no feixe é constante, mas os componentes dos momentos nas direções perpendiculares ao feixe ( $p_x, p_y$ ) são distribuídas uniformemente sobre um círculo de raio  $p_0$  no espaço dos momentos. Se algum sistema colimador reduza o raio do feixe de  $R_0$  para  $R_1$ , ache a distribuição resultante dos componentes transversais dos momentos. Qual o significado físico deste resultado? (Considere a divergência angular do feixe).